



NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L' ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L' OPTIQUE, ET A' L' ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME PREMIER.



A' BASSAN MDCCLXXXV.



& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilége.

ROGERII JOSEPHI

BOSCOVICH

OPERA PERTINENTIA

AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM

Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,

IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA

LUDOVICO XVI.

GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.

TOMUS PRIMUS.





BASSANI MDCCLXXXV.



PROSTANT
VENETIIS APUD REMONDINI.
Superiorum Permissu, ac Privilegio.





AU ROI.

SIRE

LORSQUE j'eus l'honneur de présenter à VOTRE MAJESTÉ mon poëme sur les Éclipses, *j'osai lui demander sa protection pour divers autres ouvrages sur*

des

des objets relatifs aux fonctions qui m'ont été confiées par votre auguste Ayeul. Ses bienfaits, que VOTRE MAJESTÉ *a daigné me continuer, les brevets & les lettres de naturalité, par lesquels je suis attaché au service de* VOTRE MAJESTÉ, *& compté au nombre de ses sujets, ont soutenu mon application malgré mon âge, & je n'ai rien oublié pour continuer de mériter vos bontés par de nouveaux efforts. Ce sont,* SIRE, *les fruits de ce travail que* VOTRE MAJESTÉ *m'a permis de déposer aux pieds de son Trône, & de publier sous ses auspices: heureux de pouvoir lui présenter un nouvel hommage, dans le tems où l'Europe applaudit à la*

gloi-

gloire de votre regne, en jouissant d'une paix que l'on doit à VOTRE MAJESTÉ, *& qui vient de former pour son regne une des époques brillantes de l'histoire.*

Je suis avec le plus profond respect

à Bassano ce 1 Janvier 1784

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ

Le très-humble très-obéissant &
très-fidelle Sujet & Serviteur
BOSCOVICH.

PRÉ-

PRÉFACE GÉNÉRALE

POUR CE RECUEIL.

J'appelle nouveaux les Ouvrages de ce Recueil, parceque c'est la première fois, que je les publie. Il y en a plusieurs, que j'avois faits avant mon dernier départ de l'Italie pour la France, où j'ai passé l'année 1773 après la suppression de l'Ordre Religieux, dans lequel j'avois vécu quarante huit ans, & même j'en avois envoyé plusieurs à l'Académie Royale des Sciences de Paris. Ceux-ci avoient été destinés par elle-même pour être imprimés; mais après mon arrivée en France j'ai eu des raisons pour les en retirer. Pourtant j'ai fait la plus grande partie de ces Ouvrages depuis cette époque. Ils appartiennent ou directement ou indirectement à l'Optique, & à l'Astronomie.

Il y a des méthodes, que j'ai déjà publiées ailleurs depuis long temps; mais on les trouvera ici mieux digérées. Il y a des objets, que j'avois déjà proposés dans ma Dissertation sur les Comètes imprimée à Rome il y a quarante ans. C'est la seule que j'ai jugé à propos de faire réimprimer dans le troisième Volume de ce Recueil presqu'en entier telle qu'on l'avoit imprimé alors, pour empêcher de perir tout-à-fait ce témoin

PRÆFATIO
GENERALIS
PRO HAC COLLECTIONE.

NOVA appello hujus Collectionis Opera, quod nunc primum impressa prodeunt in publicum. Plura ex iis jam ego quidem conscripseram ante postremum meum transitum ex Italia in Galliam, quò me contuli anno 1773 extincto eo Religioso Ordine, in quo vixeram per annos octo & quadraginta: nonnulla etiam transmiseram ad Regiam Scientiarum Parisiensem Academiam, quæ ipsa typis destinaverat: sed post meum adventum in Galliam non defuit, cur ea inde censuerim repetenda. Verum maximam horum Operum partem conscripsi post id tempus. Ea pertinent vel directe, vel indirecte ad Opticam, & Astronomiam.

Habentur in iis methodi nonnullæ, quas ego jam olim alibi edidi; sed eæ hìc prodibunt melius digestæ. Quædam ex iis proposita fuerant in mea Dissertatione de Cometis edita Romæ ante hosce quadraginta annos, quam unam in tertio hujus Collectionis Tomo reimprimendam censui fere totam, uti tum fuerat impressa, ne periret testis meorum veterum compertorum, nam pauca admodum ejus exemplaria impressa tum fuerant, quorum vix

de l'ancienneté de mes découvertes : car on en avoit imprimé très-peu d'exemplaires dans le temps, qui ont péri presque tous, & d'ailleurs elle contient des objets intéressants, qui appartiennent au sujet de la première partie de ce Volume.

On verra au commencement de chaque Volume, de quoi il s'y agit, dans le catalogue des Opuscules, & même des chapitres, paragraphes &c., qu'on y trouvera avec le sujet de chacun. Ici j'indiquerai seulement le total en peu de mots.

Ce premier Volume a pour objet les lunettes, qu'on appelle acromatiques. Il y a en premier lieu la description avec plusieurs usages d'un instrument, qui porte une espèce de prisme de verre à angle variable: on détermine à son aide beaucoup mieux, que par d'autres méthodes les forces de différents verres, & on découvre ce qui appartient à la nature de la lumière par rapport à la différente réfrangibilité des différents rayons relativement aux différentes substances. On y a après les formules fondamentales, dont on doit tirer les rayons de sphéricité des lentilles, qui doivent former les objectifs acromatiques, la réduction des mêmes formules à une forme plus simple, & leur application aux différents cas. Dans le même Volume on trouvera deux autres instruments, qui donnent un angle variable d'eau, comme aussi plusieurs autres objets, qui appartiennent au même sujet, & nommément à une espèce d'oculaires acromatiques.

Mais

nllum jam superest: continentur autem ibidem plura scitu digna, quæ pertinent ad argumentum hujus partis ejus Voluminis.

Quæ in singulis Voluminibus continentur, videbit Lector in ipsa serie Opusculorum, immo etiam capitum, paragraphorum &c., quæ habebitur in ipso cujusvis Voluminis initio, cum eorum argumentis. Rerum summam hic attingam brevissime.

Hoc primum Volumen agit de telescopiis dioptricis, quæ appellant acromatica. Id continet primo loco descriptionem, & usum multiplicem instrumenti cujusdam deferentis quoddam genus prismatis vitrei habentis angulum variabilem, cujus ope determinantur multo melius, quam per alias methodos vires diversorum vitrorum, & deprehenduntur ea, quæ pertinent ad naturam luminis in ordine ad diversam diversorum radiorum refrangibilitatem relate ad diversas substantias refringentes. Deinde exhibet formulas fundamentales pro eruendis radiis sphæricitatum, quas habere debent lentes, quæ acromatica objectiva constituunt, ac earundem formularum reductionem ad formam simpliciorem, & applicationem ad casus diversos. Accedunt bina alia instrumenta habentia angulum variabilem aqueum, cum aliis pluribus eodem pertinentibus, & nonnulla de quodam acromaticarum ocularium genere.

Mais je traite amplement de ce qui appartient aux oculaires dans un autre Opuscule, qui sera le premier du second Volume: on y verra des combinaisons d'oculaires formés d'une seule espèce de verre, même de verre commun, qui détruisent ces couleurs, qui frappent le plus l'œil dans les lunettes communes, qui sont produites par un seul oculaire, ou par un mauvais systême de plusieurs oculaires. On y verra encore ce qui appartient à la correction de l'erreur de sphéricité tant par rapport aux oculaires, que par rapport à l'objectif, dont on tirera la forme d'une lunette d'une seule espèce de verre, qui pourtant soit sans aucune iris sensible, & fasse beaucoup plus d'effet, que les lunettes communes. Il y aura dans le même Volume plusieurs autres objets appartenants à la Dioptrique: un des plus intéressants est une nouvelle espèce de lunette, qui puisse décider la question sur la vîtesse de la lumière, si celle-ci va plus vîte ou plus lentement dans les milieux plus denses, & qui donne un mouvement apparent aux objets terrestres. Il y aura la théorie des réfractions astronomiques, qu'on pouvoit bien joindre aux Opuscules Dioptriques, puisque la Dioptrique aussi a pour fondement le principe des réfractions.

Dans le troisième Volume il y aura une méthode pour trouver beaucoup plus facilement qu'on n'avoit fait auparavant les orbites des comètes par trois observations, quoique peu éloignées entr'elles, avec plusieurs Opuscules sur la nouvelle planète découverte en Angle-

terre

Verum quæ pertinent ad oculares, fuse pertractantur in Opusculo, quod erit primum secundi Voluminis, ubi occurrent combinationes ocularium ex eodem vitri etiam communis genere, quæ destruant eos colores, qui in telescopiis communibus in oculos maxime incurrunt, & oriuntur ab oculari unica, vel ab inepto plurium ocularium systemate. Accedent, quæ pertinent ad corrigendum errorem sphæricitatis tam ocularium, quam objectivi, unde profluet forma telescopii dioptrici ex eodem unico vitri genere, quod tamen careat omni iride sensibili, & multo majorem, & meliorem effectum edat, quam communia dioptrica telescopia. Habebuntur in eodem Volumine plura alia pertinentia ad Dioptricam, inter quæ quoddam novum telescopii dioptrici genus, cujus ope dirimi certo possit quæstio de celeritate luminis, an nimirum in medio densiore progrediatur celerius, an lentius, inducunt autem motum apparentem in objecta terrestria immota. Habebitur refractionum astronomicarum theoria, quæ apte conjungitur cum dioptricis Opusculis, cum Dioptrica eidem refractionum principio innitatur.

Tertium Volumen continebit methodum deducendi multo facilius, quam antea sit præstitum, orbitas cometarum ex tribus observationibus etiam inter se proximis, ac Opuscula plura pertinentia ad planetam novum ab Herchelio in Anglia detectum: occurrent autem plura pro his argumen-

tis

terre par M. Herchel. On y trouvera plusieurs théories employées pour ces objets, qui ont un usage beaucoup plus général dans les Mathématiques.

Dans le quatrième Volume il y aura principalement la méthode pour vérifier presque toutes les espèces d' instruments, qui sont en usage dans l' Astronomie. Le dernier contiendra plusieurs Opuscules, qui appartiennent sour-tout directement à la même Astronomie.

Presque tout ce que j'ai fait en Italie, ou les premières années de ma demeure en France, est écrit en latin. Ce n' est que quelques années après, que je me suis hasardé à écrire en françois. Je donne tout cela tel qu'il s' y trouve. Parmi les Mémoires des Savants Étrangers publiés par l' Académie Royale des Sciences de Paris il y en a aussi des latins mêlés avec le françois. Mais encore pour ceux, qui ne s' étant pas soucié de la langue latine ne l' entendent point, ou qui ne l' aiment pas, il y aura à la fin de chaque Volume des extraits de tout ce qu' il contient soit en latin, ou en françois. Il y aura bien dans mon françois des fautes de langue, & des expressions moins exactes; mais j' espère, qu' on les pardonnera à un Étranger, qui ne propose ici des ouvrages de litterature, mais des Sciences, où il suffit de se faire comprendre.

Il y a ici beaucoup des pièces que j' ai faites depuis bien d' années, & comme je n' ai jamais été jaloux de

ce

tis adhibita, quæ usus habeant in Mathesi multo generaliores.

In quarto Volumine habebitur inter cætera methodus verificandi fere omnia instrumenta, quæ in Astronomia adhiberi solent. In postremo habebuntur multa Opuscula agentia de pluribus argumentis pertinentibus potissimum directe ad Astronomiam.

Ea fere omnia, quæ elucubravi in Italia, vel primis annis post meam commorationem in Gallia, latino idiomate sunt conscripta. Non nisi post aliquot annos gallicam in scribendo linguam adhibere sum ausus. Ea ita profero, uti conscripta sunt. Ipsa etiam Parisiensis Scientiarum Academia in Voluminibus, quæ exterorum monumenta continent, gallicis latina conjungit. Verum pro iis etiam, qui latinam linguam vel ita neglexerunt, ut jam non intelligant, vel omnino non amant, habebuntur in fine Voluminis cujuscumque compendia eorum omnium, quæ utrovis idiomate conscripta in eo continebuntur. Occurrent utique identidem in meo gallico textu quæpiam, quæ peccent contra ejus linguæ leges, occurrent expressiones minus exactæ: sed omnino spero fore, ut ea facile ignoscantur homini extero, qui non opera proponit ad humaniores litteras pertinentia, sed ad Scientias, in quibus illud abunde est, ut quæ proponuntur percipi possint.

Multa ex iis conscripta sunt jam a multis annis, & quoniam ego nunquam suspiciosus fui, ac difficilis in iis,

ce que je découvrois ; on trouvera peut-être imprimée ailleurs quelque partie de ce qu'on verra ici , qui appartient réellement à moi , quelques méthodes , quelques instruments , que je propose comme imaginés par moi . J'ai envoyé plusieurs de ces objets à des Académies , j'ai communiqué les théories , & les méthodes à des amis , & j'ai fait voir les instruments à tout le monde , même aux Ouvriers , qui les ont imité , & débité (*) . J'espère qu'on ne m'accusera pour cela de plagiat , puisqu'on connoît assez mon caractère , & ma façon de penser . Mais aussi indépendamment de cela on y reconnoîtra des objets réellement tout-à-fait nou-

---

(*) *On avoit déjà imprimé le second Volume de ce Recueil , quand un ami m'a écrit , que dans les Transactions Philosophiques pour l'an 1782 , année de mon départ de Paris pour faire cette impression ici , il y a une Dissertation sur le même sujet , que j'ai traité dans l'Opuscule III de ce Volume . On y propose l'usage d'une lunette à tuyau plein d'eau pour déterminer la différence de la vitesse de la lumière dans des différents milieux . J'avois déjà non seulement imaginé cette méthode de l'an 1766 ; mais je l'avois exposée en détail dans une lettre écrite de Milan au P. Beccaria Mathématicien de Turin Membre de la Societé Royale de Londres , qu'on trouvera peut-être parmi ses papiers , si on les a conservés après sa mort : mais par rapport à cet objet j'ai le témoignage du très-célèbre Astronome M. de La-Lande , auquel je l'avois aussi communiqué . Il s'en est exprimé dans le Volume IV de son Astronomie à la page 686 en disant :* Le P. Boscovich m'écrivoit en 1766 , qu'il avoit imaginé on moyen de voir , si la vitesse &c. *On a imprimé , & publié ce Volume l'an 1781 , & la Dissertation susdite n'a été lûe dans une séance de la Société de Londres que l'année suivante . Il n'y a ici aucun exemplaire de ce Volume Anglois ; mais le même ami m'a écrit , qu'il n'y a rien sur le mouvement apparent qui doit y avoir dans les objets terrestres immobiles regardés par une lunette de cette espèce , que j'ai ajouté dans cet Opuscule sans l'avoir communiqué avant à personne , & j'y ai développé toutes les loix de ce mouvement . Il y a , comme on m'a écrit , dans la même Dissertation des propositions , que l'Auteur même appelle des paradoxes . Les gens du métier en lisant avec attention mon Opuscule en connoîtra bien la fausseté .*

quæ pertinent ad mea comperta, fieri utique poterit, ut & alicubi alibi occurrant typis etiam fortasse impressa aliqua ex iis, quæ hìc exhibentur, & revera sunt mea, ut methodi nonnullæ, ac instrumenta quæpiam, quæ ego propono, ut a me excogitata. Transmisi plura ad Academias, communicavi theorias ac methodos cum amicis, & publice videnda proposui instrumenta, artificibus etiam, qui ea exposuerunt venalia (*). Spero equidem, me idcirco de plagiatu accusatum non iri. Mea & agendi, & cogitandi ratio satis est nota. Verum independenter etiam ab eo occurrent reapse multa omnino nova, & quæ admodum utilia sint mathematicis

(*) Impresso jam secundo hujusce Collectionis Volumine, accepi per litteras ab amico, haberi in Transactionibus Philosophicis Anglicanis pro anno 1782, quo ego Parisiis pro hac impressione discessi, Dissertationem, cujus argumentum est idem, ac illud, quod ego pertractavi in Opusculo III ejus Voluminis. Nimirum proponitur usus telescopii dioptrici habentis tubum aquâ plenum pro determinando discrimine velocitatis, quam habet lumen in percurrendis diversis mediis. Ego jam ab anno 1766 id ipsum non solum conceperam animo, sed prorsus evolveram in epistola data Mediolani ad Taurinensem Mathematicum Beccariam ipsius Regiæ Societatis Membrum, quæ fortasse adhuc extabit inter ejus schedas, si post ejus obitum conservatæ sunt: verum ejusdem veteris consilii mei testem habeo Astronomum celeberrimum La-Landium, cui id ipsum jam tum communicaveram. Is enim in Tomo IV suæ Astronomiæ pag. 686. id ipsum expressit: *Le P. Boscovich m'écrivoit en 1766 qu'il avoit imaginé un moyen de voir, si la vitesse &c.* Is ejus Tomus prodiit typis impressus, & evulgatus anno 1781, dum ea Dissertatio non nisi sequenti anno perlecta est in Societatis Londinensis consessu. Hic ejus Anglicani Voluminis nullum habetur exemplar: verum ab eodem amico accepi, nullam ibidem mentionem fieri motus apparentis, quem habere debent terrestria objecta immota trans ejusmodi telescopium transpecta, quod ego cum nemine ante communicatum adjeci in eodem Opusculo, ac ejus motus ibi leges omnes evolvi. Habentur in ea Dissertatione nonnulla, ut accepi, quæ Auctor ipse paradoxa appellat, quæ tamen falsa omnino deprehendet, qui harum rerum peritus meum illud Opusculum attente perlegerit.

nouveaux , & bien utiles tant pour les Mathématiques élémentaires , que pour les sublimes.

À la fin de mon poëme latin des Éclipses , qui après deux autres éditions faites ailleurs a été publié à Paris avec une version françoise , on trouve un Précis des Ouvrages mentionnés dans l'Épître Dédicatoire au Roi. *J'avois eu l'honneur de lui offrir ces Ouvrages aussi destinés à être imprimés sous sa haute protection : ils répondent aux expressions de deux espèces de lettres patentes , qui par la munificence Royale m'avoient fixé en France à la suppression de l'Ordre Religieux, dont j'étois membre. Les premières portent , qu'on me donne une* retraite dans le Royaume de manière, que je puisse me livrer sans distraction à l'attrait des méditations sublimes , & à mon zèle pour l'accroissement des Sciences ; *les secondes me donnent le titre de* Directeur d'Optique au service de la Marine pour perfectionner l'Optique , & particuliérement la théorie des lunettes acromatiques , dont la Marine a besoin pour les Observatoires astronomiques , & pour le service des vaisseaux.

Je donne ici à présent tout ce qui étoit préparé alors , plus limé , avec d'autres Ouvrages que j'y ai ajouté depuis . On verra par tout cela , que je n'ai pas été oisif dans ces années , & que je me suis occupé de ce qu'on m'avoit ordonné. J'espère que mon travail ne réussira pas inutile.

On pourroit bien demander , pourquoi je n'ai pas tâché d'imprimer ces Ouvrages en France à la place

de

tam elementaribus, quam etiam sublimioribus disciplinis.

Ad calcem mei latini poëmatis de Eclipsibus, quod bis alibi antea impressum prodiit Parisiis cum versione Gallica, habetur brevis notitia Operum, quorum mentionem injeceram in Epistola nuncupatoria ad Regem, & quæ pariter sub potentissimo ipsius patrocinio typis imprimenda ipsi obtuleram, respondentia binis diplomatis, quibus me Regia munificentia fixit in Gallia in ipso primo interitu Religiosi Ordinis, cui antea fueram adscriptus. Illud in eorum primo exprimitur, *secessum mihi præberi in eo Regno, ut meditationibus sublimibus libere vacare possim, & ad Scientiarum progressum incumbere:* in secundo mihi præbetur titulus *Directoris Opticæ pro Re Maritima, ut animum applicem ad perficiendam Opticam, & in primis Theoriam telescopiorum acromaticorum, quibus ipsa Res Maritima indiget pro astronomicis Observatoriis, & navium usu.*

Ea, quæ tum parata jam fuerant, adhuc magis perpolita, aliis adjectis, hìc prodeunt, ex quibus omnibus patebit sane, me nón inertem per hosce annos extitisse, & iis ipsis, quæ injuncta fuerant, dedisse operam, quam quidem non inutilem fore confido.

Quæret fortasse quispiam, cur hæc non in Gallia curaverim imprimenda, sed longo suscepto itinere in Italiam,

de faire le long voyage pour les porter à cet effet en Italie, & nommément à Bassano. Je répondrai, que j'ai été déterminé à cette démarche par plusieurs raisons. Premiérement une grande partie en est écrite en latin: or à présent un grand nombre de ceux, qui cultivent en France les Mathématiques, ou ont quitté le latin tout-à-fait, ou très-difficilement se déterminent à le lire. Ainsi les libraires à présent n' impriment jamais à ses frais des Ouvrages latins appartenants aux Sciences: & ils en ont bien raison, parcequ' il ne trouveroient dans le Royaume, que très-peu d' acheteurs de cette espèce d' Ouvrages écrits dans cette langue. Mais encore pour les Ouvrages remplis de Géométrie & de calcul, même quand ils sont écrits en françois, on ne trouve pas en France des libraires, qui veuillent les imprimer à leurs frais. L' Auteur est forcé à en faire ou toute, ou presque toute la dépense, qui même est deux, & encore trois fois plus forte en France qu' en Italie, ou il faut, qu' il se borne à faire imprimer un petit nombre d' exemplaires pour en faire des présents à ses amis: s' il en fait tirer un plus grand nombre, il est obligé à faire le marchand de livres: & comme il n' est pas à portée de cette espèce de commerce, il trouve la plus grande difficulté à les débiter: il ne peut pas en faire passer à l' étranger qu' un très-petit nombre, de manière que ses découvertes restent ignorées, comme si on ne les avoit pas imprimées.

Voi-

liam, & Bassanum potissimum advexerim. Ratio multiplex in promptu est: magna horum pars latine conscripta est, multi autem in Gallia ex iis, qui mathematicis studiis dant operam, vel latinæ linguæ jam penitus vale dixerunt, vel ægre admodum eo adducuntur, nec nisi vi sibi adhibita, ut latina legant: hinc etiam Bibliopolæ latina ad Scientias pertinentia suis sumptibus per hæc tempora in Gallia nequaquam imprimunt, & quidem jure: emptores enim in eo Regno ejusmodi Operum eo idiomate conscriptorum inveniunt admodum raros. Sed ne gallico quidem idiomate conscripta, quæ geometricis demonstrationibus, & algebraicis calculis sint referta, Bibliopolas inveniunt, qui suis sumptibus ea imprimant. Vel omnem, vel fere omnem impensam subire debet ipse Auctor, quæ quidem in Gallia est duplo, ac etiam triplo major, quam in Italia, nec nisi pauca exemplaria imprimere, quæ amicis dono det, vel si plura curaverit imprimi, librariam omnino debet exercere mercaturam, cujus expers, admodum difficulter eadem distrahat, nec nisi pauca ad exteras regiones transmittat, compertis suis latentibus fere, ac si edita non fuissent.

Id

Voilà la raison, qui m' a fait venir en Italie, où j' avois plusieurs offres pour l' impression de ces Ouvrages : mais il n' y avoit aucun lieu plus à propos que celui-ci. Il y a ici la grande Imprimerie, dont Messieurs les Comtes Remondini sont les propriétaires. Ils sont bien persuadés, qu' il ne fait aucun tort à la noblesse un gran commerce, que même on y gagne du côté de l' estimation, & du lustre par un commerce, qui ne tend seulement à augmenter les richesses d' une famille particulière, mais à cultiver les esprits par toute espèce de bons Ouvrages, & satisfaire avec profit les yeux par la variété des estampes bien choisies, & bien exécutées. Ces Messieurs font aller continuellement à leurs frais un très-grand nombre de presses, & c' est sur-tout à-présent, qu' ils ont tout le soin d' employer de très-beaux caractères, du bon papier fabriqué de même à leurs frais, & sous leurs yeux, & toute l' attention pour la correction des épreuves (*).

De

(*) *Pour ce qui appartient à la correction on ne trouvera presqu' aucune part dans ces cinq gros Volumes, des erreurs réellement typographiques : on a fait au moins six révisions des épreuves en partie à l' Imprimerie, & en partie chez moi. Ceux qui s' occupent de cette espèce d' études savent bien, quel y est l' effet ordinaire des distractions, qui font échapper à l' Auteur même en écrivant des fautes, qui pourtant pour la plupart ne touchant pas à l' essentiel, & aisément connues ne détruisent pas la force des démonstrations. On peut en apporter un très-grand nombre d' exemples en nommant les Ouvrages des Auteurs du premier ordre, qui en ont eu un grand nombre, sur-tout dans les premières éditions.*

J' ai employé ici pour cet objet le plus grand soin aidé par des amis versés dans ces études, tant pour prévenir cette espèce de fautes avant l' impression, que pour corriger après l' impression, sur-tout dans les premiers Volumes envoyés

avant

Id in causa fuit, cur in Italiam secesserim, ubi plures aderant, qui ad hæc imprimenda operam mihi offerrent suam. Sed nullus erat locus hoc aptior, in quo Comitum Remondinorum familia jure censens, nihil obesse generis nobilitati late patens commercium, verum etiam ad laudem, & decus conferre plurimum illud commercii genus, quod non tantum ad uberes privatas opes augendas conducat, sed ad animos doctrina excolendos, oculos impressarum tabularum delectu, ac varietate utiliter demulcendos conferat, amplissimam hanc Typographiam suis sumptibus alit, sua cura fovet, ac dirigit, ubi præter immensam coloratarum omnis generis chartarum, atque imaginum multitudinem editur perpetuo ingens librorum copia magno prælorum numero sudante semper, atque id nunc potissimum characteribus nitidissimis, charta egregia, perfecta ipsorum itidem sumptibus, & cura, & correctione adhibita admodum diligenti (*): commercium autem amplissimum late per universam Europam protensum,

(*) Quod ad correctionem pertinet, vix ullum inveniet lector in hisce quinque amplis Voluminibus, qui sit error vere typographicus, cum revisiones saltem sex sint adhibitæ partim in Typographia ipsa, partim apud me. Norunt omnes, qui hisce studiis dant Operam, quam facile per mentis evagationem excurrant ipsi Auctori in scribendo multa, quæ tamen a lectoribus harum rerum peritis facile deprehendantur, & corrigantur, plerumque tamen non corrumpant rerum summam, nec demonstrationum vim obtundant, facile nimirum agnita. Plurima eo in genere proferri possunt exempla Auctorum magni nominis, in quorum Operibus ingens ejusmodi errorum numerus occurrit, potissimum in primis eorum editionibus.

Maximam hic eo in genere diligentiam adhibui potissimum per amicos in hisce studiis versatos tam ante impressionem ad eos præveniendos, quam post prima potissimum volumina impressa, & transmissa ante evulgationem, ad eos

De l' autre côté leur commerce est très-étendu par toute l' Europe , & même au de-là , ce qui fait aller par tout les exemplaires .

Il faut y ajouter les liens de l' amitié , que j' avois contracté avec eux depuis long temps . Il y a vingt deux ans , que j' y ai logé du vivant de Monsieur leur Père , quand sous mes yeux il a fait la réimpression de ma Théorie de la Philosophie Naturelle qui est réussie bien belle , & bien correcte . Le même Monsieur de ce temps-là m' avoit offert de réimprimer tous mes Ouvrages publiés jusqu' alors , dont il a mis un grand catalogue à la fin de ce Volume , & il s' est exprimé sur cet article dans la préface qu' il a mis à la tête de cet-

avant la publication , les erreurs échappées en faisant effacer des lettres , ou des accents , & substituer ce qu' il falloit par une impression fait à la main dans l' Imprimerie même . Sur cet article j' ai des très-grandes obligations principalement à M.r Leonard Stecchini jeune Seigneur de la noblesse de Bassano , qui a très-bien étudié les Mathématiques à l' Université de Padoue , qui m' a assisté ici , & a M.r l' Abbé François Puccinelli d' une noble famille de Pescia Mathématicien très-savant , qui a travaillé avec moi à l' Observatoire de Milan , qui a examiné plusieurs de ces Opuscules avant l' impression , & il en a revu un plus grand nombre après , en m' envoyant les erreurs , dont il s' est aperçu . Mais sur-tout plusieurs parties des premiers Volumes ont été examinés avec le plus grand soin par le très-Révérend Père Vitalien Riva Abbé de l' Ordre de Vallombrosa *Professeur de Mathématique , & Physique à Florence , homme de très-grand mérite , & très estimé .*

On a corrigé dans tous les exemplaires ce qu' on pouvoit faire en effaçant , & substituant : on trouvera dans un Errata mis à la fin de chaque Volume à l' ordinaire ce , qui exigeroit un plus grand changement . S' il y a quelque reste , il sera reconnu aisément & corrigé par ceux , qui sont à portée de ces matières : mais j' espère , qu' il y aura très-peu , & rien de ce qui puisse pervertir les méthodes , ou rendre fautives les formules algébriques , qui doivent être le fondement des calculs numériques , le plus grand soin possible ayant été employé pour la correction de ces formules .

sum, & vero etiam extra ipsam, distrahit exemplaria quaquaversus.

Accedebat vetus amicitia contracta jam olim vivente patre, apud quem ante hosce viginti duos annos diversatus sum hospes, donec secundam editionem perfecit meæ Theoriæ Philosophiæ Naturalis, quæ satis & correcta prodiit, & elegans. Idem se mihi jam tum obtulerat, quod in ipsa Præfatione professus est, ad reimprimenda omnia mea præcedentia Opera, quorum catalogum admodum amplum impressit ad calcem ejus ipsius Voluminis. Nunquam mihi huc usque per alias curas licuit animum applicare ad ea secundis curis recensenda, & perpolienda,

 & qui-

eos, qui adhuc superfuerant, corrigendos, abrasis etiam litterulis, & accentibus, & substitutis aliis per impressionem manu factam ab ipsis typographis. Ea in re me plurimum debere profiteor in primis Leonardo Steechinio nobili Bassanensi juveni in Patavina Universitate mathematicis disciplinis egregie imbuto, qui præsens hic mihi adfuit, Francisco Puccinello Pisciensi nobili itidem viro, ac Mathematico doctissimo, meo olim in Mediolanensi Observatorio adjutori, qui nonnulla ex hisce Opusculis & ante impressionem revocavit ad trutinam, multo autem plura jam post impressionem ad eum transmissa perlegit, & quæ ipsi in oculos incurrerunt corrigenda ad me transmisit: priora autem Volumina in primis ad eum post impressionem transmissa diligentissime expendit maxima ex parte Vitalianus Riva e Vallumbrosanorum familia Abbas Reverendissimus, vir summus, qui Mathesim, & Physicam in Florentina urbe publice profitetur maxima eum laude.

Quæ per exiguam abrasionem corrigi poterant, correcta sunt in exemplaribus omnibus; quæ majorem mutationem requirebant, inveniet lector in fine cujusvis Voluminis in catalogo errorum corrigendorum de more. Si quid adhuc supersit, deprehendet facile harum rerum peritus, & corriget. Spero autem pauca admodum superfutura, & omnino nihil, quod methodos pervertat, aut erroneas reddat illas algebraicas formulas, quæ arithmeticorum calculorum fundamentum esse debeant, in quibus formulis ad trutinam revocandis diligentia est adhibita multo maxima.

cette édition. Mes circonstances ne m' ont pas permis jusqu' à-présent de m' occuper de cet objet : il faudroit employer beaucoup de temps & de travail pour repasser, & limer tout cela, puisqu' il y a de quoi remplir au moins douze Volumes pareils à ceux-ci. Mais comme à-présent mon devoir me poussoit à imprimer cette Collection de mes nouveaux Ouvrages, & Messieurs les Comtes Frères m' ont offert avec la plus grande politesse leur Imprimerie avec toutes les dépenses nécessaires pour l' impression, & le soin pour faire aller partout les exemplaires, j' aurois fait une grande sottise à ne pas profiter d' une si belle occasion, comme aussi je manquerois à la politesse, & à la reconnoissance, si je ne m' empressois à rendre le témoignage de tout cela, en y ajoutant les mille traits d' attention de toute espèce, dont ils me comblent, & m' obligent toujours plus. Je l' énonce ici ; mais il m' a fallu insister avec tout l' empressement possible pour obtenir d' eux la permission de le faire dans cette Préface.



IN-

& quidem vix duodecim Volumina hujusce molis ad omnia complectenda sufficerent. Cum interea Collectionem hanc novorum Operum editurus essem, ut meo muneri facerem satis, ipsi autem Remondini fratres operam suam, & sumptus omnes, & longe, lateque distrahendorum exemplarium curam humanissime exhiberent, ineptus fuissem sane, nisi occasionem oblatam arriperem, & inurbanus, nisi hæc ipsa, & omne officiorum genus, quo me quotidie magis sibi devinciunt, in grati animi significationem hìc profiterer, quod ut fieret, ægre demum ab ipsis, nec nisi maximo conatu adnixus, impetravi.



INDEX

OPUSCULORUM, CAPITUM, PARAGRAPHORUM, SUPPLEMENTORUM &c.

Quæ in hoc primo Tomo continentur.

OPUSCULUM I.

SUPPLEMENTA

§. III.

E X T R A I T

NO-

NOVORUM OPERUM

MATHEMATICORUM

ROGERII JOSEPHI BOSCOVICII

TOMUS I.

Theoria telescopiorum, quæ appellantur acromatica.

PRÆFATIO.

I. ACROMATICA jam vulgo appellantur telescopia dioptrica, quæ habent objectivum constans una lente concavâ ex vitro magis distrahente a se invicem radios heterogeneos pari refractione media, & alterâ convexâ ex vitro minus distrahente, quæ Dollondus pater invenit circa annum 1759. Illi unicæ convexæ substitutæ sunt postea binæ, ambæ constantes ex eodem vitro, quibus concava interjacet. Id nomen adeptum est hoc telescopii genus ex eo, quod censeretur destruere colores illos, qui apparere solent in communibus telescopiis dioptricis, & exhibent in ipsis quandam iridis speciem, a Græco vocabulo, quod exprimit *coloris expers*.

II. Communiter ii, qui de hoc telescopiorum genere agunt, toti sunt in iis, quæ pertinent ad objectivum. Ego itidem paullo post eam inventionem conscripsi binas Dissertationes de eodem argumento, quas transmisi ad Academiam Bononiensem, inter cujus monumenta prodierunt in tomo V, sed multo serius. Interea exemplaria aliquot jam ibi impressa, & inde excerpta, antequam ipsum volumen prodiret in publicum, transmiseram ad plures amicos, & jam prior in germanicum idioma translata fuerat, & typis edita, cum anno 1767 Vindobonæ prodiit utraque, ut erat latine conscripta, una cum aliis tribus; sed pro ea editione

tione adhibui mutatiunculas quasdam, & adjeci adnotationes (*). Plura deinde in ipsis me absente impressis deprehendi typorum menda. Multa ex iis, quæ in prioribus binis continentur, huc transfero in hunc primum tomum, sed aucta, & melius digesta. Tertiam dabo integram in sequenti, cum arcte admodum connectatur cum iis, quæ in utroque tomo pertractantur, & compertum contineat, quod ego quidem judico non exigui momenti.

III. Colores, qui in communibus telescopiis dioptricis apparent, oriuntur multo magis ab ocularibus, quam ab objectivis, qua de re fuse ago in Opusculo, quod cum binis pertinentibus potissimum ad objectiva huic tomo destinaveram: sed cum nimis in longum res abiret, & plura, quæ appello supplementa, pertinentia ad priora duo Opuscula se mihi offerrent, ipsum reservavi tomo secundo, cujus initium erit quoddam veluti complementum hujusce primi. Patebunt inde ocularium & vitia, & remedia, & habebitur telescopii dioptrici genus, quod totum ex eodem constet etiam communi vitro, & tamen careat iride, quæ sensum transpicientis afficiat: id autem debet multo majorem effectum edere, quam ea, quæ vulgo circumferuntur, edere possint. Bina Opuscula, quæ habentur in hoc Volumine, pertinent fere penitus ad objectiva acromatica.

IV. Objectivum simplex, quod in communibus dioptricis telescopiis adhibetur, bina habet vitia, quæ intra limites nimis arctos coercent eorum effectum. Primum vitium est illud, quod superficies sphæricæ, ad quas tornantur lentes vitreæ, non colligunt accurate in unico puncto radios ne homogeneos quidem, sed propius eos, qui incurrunt in marginem aperturæ, quam eos, qui incidunt prope ejus centrum: eorum punctorum distantia est error sphæricitatis, qui quidem jamdudum innotuerat, & quæsitum fuerat ipsi remedium substituto alio genere curvaturæ, quod tamen vitris nulla arte satis accurate inducitur. Secundum vitium oritur a diversa refrangibilitate diversorum radiorum luminis detecta

(*) Titulus est *Dissertationes quinque ad Dioptricam pertinentes*.

ecta a Newtono, qua fit ut ex immenso numero filorum coloratorum, quorum omnium conjunctio efformat radium album, incidentium in puncta objectivi æque distantia ab ejus centro, ea, quæ magis refringuntur, ut violacea, colligantur in puncto propiore ipsi lenti, quam ea, quæ minus, ut rubea: eorum punctorum distantia est error refrangibilitatis. Hujus correctio si obtineri posset prorsus accurata, efformaretur objectivum vere acromaticum.

V. Hunc errorem Newtonus inito calculo pro quodam objectivo plano-convexo habente radium sphæricitatis pedum 100, & diametrum aperturæ pollicum 4, invenerat in immensum majorem illo priore, quam ob causam cum putaret, ipsi nullum remedium adhiberi posse, censuit, nihil de illo priore curandum esse, & de perfectione telescopiorum dioptricorum desperans, catadioptrica ipsis substituit. Remedium invenit Dollondus; sed in hoc ego volumine ostendo, ejus methodo imminui quidem plurimum id vitium, non accurate tolli: nimirum per duo genera vitrorum uniri non possunt nisi duo colorum genera; verum conjunctis extremis colores intermedii multo minus aberrant. Cum eas Dissertationes conscriberem, ignorabam, ipsum Dolondum cum correctione erroris hujusce posterioris conjunxisse correctionem prioris, quod ab eo jam tum fuisse præstitum, vidi in posteriore quodam Maskelynii schediasmate. Sphæricitatis error, qui per simplicem lentem corrigi non potest, corrigitur per duas, & quidem huic correctionum conjunctioni tribuendus omnino est Dollondianorum telescopiorum successus; nam, ut patebit in postremo hujus tomi supplemento, in lentibus habentibus aperturas, quas breviora ipsius telescopia admittunt, proportio primi erroris ad secundum est multo minor, & patebit ex iis, quæ in hoc, & in sequenti tomo habebuntur, primum illum errorem comparatum cum posteriore exercere vim in oculum multo majorem, quam pro magnitudine utriusque.

VI. Circa hosce objectivorum errores deprehendendos, & corrigendos versatur hic tomus primus, & excurrit tantummodo ad correctionem solius secundi in quodam ocularium genere, quibus ille prior minus nocet. Verum ad remedium adhibendum iis errori-

rori-

roribus, oportet nosse diversorum vitrorum vires, quarum determinatio requiritur ad eruendos radios sphæricitatum pro lentibus objectiva componentibus ad id idonea. Primum Opusculum versatur totum circa instrumenta, quorum ope ejusmodi vires facile deprehendi possint: secundum formulas exhibet pro determinanda per calculum magnitudine errorum, & determinandis radiis sphæricitatum, quæ ipsos corrigant. Instrumentum præcipuum, quo nunc utor, fuse describitur in Opusculo primo, adjecto ejus usu multiplici: ejus forma mihi in mentem venit Venetiis anno 1773, ubi ipsum curavi perficiendum ab egregio telescopiorum artifice Dominico Selva: plura alia ad ejus imitationem deinde constructa sunt & ibi, & alibi. In supplementis habentur alia duo, quorum altero utebar cum priores illas edidi Dissertationes, alterum deinde ipsi substituendum censui: in alio autem supplemento exhibeo methodum, qua eorum instrumentorum defectus suppleri possit. In secundo Opusculo habentur algebraicæ formulæ, & numerica exempla pro uniendis per binas substantias binis coloribus. In primo ipsius supplemento exhibeo formulas, quas R. P. Gaudibertus e Dominicanorum familia deduxit e meis admodum utiles pro quibusdam usibus, cujus merita indico in adnotatione adjecta pagina 416. In secundo habentur formulæ pro uniendis per plures substantias coloribus pluribus, in tertio habetur methodus determinandi errores residuos in objectivo composito juxta formulas, quæ plures negligunt inferiorum ordinum quantitates.

VII. Sed ordo eorum, quæ in toto hoc Volumine continentur, patebit uberius ex indice præmisso. Brevem omnium notitiam ingeret compendium adjectum, in quo præcipua quæque gallico sermone complector, strictim quidem, sed ita, ut singulorum idea concipi possit satis distincta.

OPU-



OPUSCULUM I.

DE CONSTRUCTIONE, ET USU NOVI INSTRUMENTI MAXIME IDONEI AD DETERMINANDAS VIRES REFRACTIVAS, ET DISTRACTIVAS SUBSTANTIARUM DIAPHANARUM.

§. I.



Plures notitiæ præmittendæ.

1. HOC ego Opusculum conscripsi paullo post ultimum meum adventum in Galliam, ubi me Christianissimi Regis munificentia fixit anno 1773 Gallis adscriptum. Cum nondum Gallicam linguam callerem ita, ut possem ea uti ad opera conscribenda, quod utcumque præstiti sequentibus annis, latine scribendum fuit. Statim arripui argumentum, quod, ut exposui in Præfatione, propositum mihi fuerat in Regio diplomate, nimirum theoriam telescopiorum dioptricorum, quæ vocant acromatica. Binas ea continet partes, ad quas totum id opus reducitur. Ad primam pertinet methodus determinandi vires diversas diversorum vitrorum, ex quorum combinatione pendet omnis eorundem telescopiorum effectus, ad secundam ratio deducendi ex ipsis viribus determinatis sphæricitates, quæ lentibus apte combinandis induci debent. Singulis singula hujusce voluminis Opuscula sunt destinata, ut itidem innui in Præfatione.

2. Pro primo illud mihi commode accidit, quod superiore anno excogitaveram, & Venetiis perficiendum curaveram, ut itidem innui in generali Præfatione, instrumentum ad eam rem maxime idoneum, cujus nimirum ope & observationes pro singulis vitrorum generibus admodum facile instituuntur, & calculo numerico simplici, & expedito deducuntur ex ipsis observationibus vires quæ-

sitæ. Adhibui in ipso Dollondiani comperti initio alias methodos, quarum nonnullas in prima e meis Bononiensibus, ac Viennensibus dissertationibus descripsi: tum vitrometrum quoddam aqueum, quod in eadem describitur, ac exhibetur hic in supplemento secundo, addito altero ejusdem generis commodiore, quod habetur in supplemento tertio. Deinde alia methodo usus sum prismate variabili vitreo, quod huic demum instrumento applicui, ac eam methodum exhibeo hic in supplemento quinto, ut & in quarto nonnullas magni momenti observationes institutas ope illius prioris vitrometri. Hoc autem instrumentum multo magis opportunum, & alia ad ejus usum necessaria expono fuse in hoc ipso primo Opusculo.

3. Multo ante Newtonum, & Cartesium innotuerat, radium luminis, dum oblique transit per superficiem dirimentem duas substantias diaphanas heterogeneas, mutare directionem, & ibidem quodammodo veluti frangi, quem effectum appellarunt luminis refractionem: per eam fit, ut & remus in ipso ingressu in aquam appareat fractus. Cartesius ex Snellii determinatione relativa ad secantes invenit legem refractionis ipsius jam communiter adhibitam in Optica, qua fit, ut sinus incidentiæ, quem continet radius adveniens cum linea perpendiculari ad superficiem dirimentem eadem media, habeat rationem constantem ad sinum anguli, quem communiter vocant angulum refractionis, quem continet radius refractus cum continuatione ejusdem perpendiculi: ego autem illum malo appellare angulum refractum, ut nomen refractionis applicetur angulo, quem continet directio radii advenientis continuata ultra superficiem refringentem cum radio refracto, qui nimirum exhibet quantitatem, qua mutatur directio itineris, in quo sensu ipsum nomen refractionis adhibetur in Astronomia. Newtonus invenit postea, radium luminis integrum album utcumque tenuem constare immenso numero filorum heterogeneorum, quæ ubi adveniunt ad oculos singula, excitant ideam singulorum e coloribus primigeniis: ubi omnia simul appellunt, excitant ideam coloris albi: plura diversorum generum efformant colores compositos: immensus autem ille diversorum colorum primigeniorum numerus reducitur ad septem, rubeum, aureum, flavum,

viri-

viridem, cæruleum, indicum, violaceum, compulsis in eandem classem iis omnibus, qui minus a se invicem differunt.

4. Innotuerat itidem, eundem radium in ingressu ex aere in diversas substantias cum eadem inclinatione refringi magis, vel minus pro diversa vi refractiva substantiarum: refringitur cæteris paribus magis a vitro, quam ab aqua. At Newtonus invenit, in transitu cum eadem inclinatione per superficiem dirimentem eadem duo media alios e radiis refringi magis, alios minus, refractis omnium minime primis rubeis, tum reliquis magis eodem ordine, quo nominati sunt, usque ad postremos violaceos, qui omnium maxime refringuntur. Ostendit autem, discrimen hoc diversæ refrangibilitatis inhærere in ipsa radiorum natura; nec omnem ejusmodi theoriam impugnant, nisi ii, qui ipsam, & quæ ad ejus probationes pertinent, vel ignorant, vel non satis intelligunt. Cum ab hoc refractionum discrimine fila omnia, quæ componunt radium integrum album, dispergantur; qualitatem substantiarum, quæ inducunt majus, vel minus discrimen refractionis, appellarunt vim dispersivam: sed ubi agitur de separatione mutua binorum tantummodo filorum, quorum aliud ita ab alio distrahitur; ego eam hic appello vim, vel qualitatem distractivam.

5. Dollondianum inventum in eo consistit, ut per duas substantias rite combinatas corrigatur distractio, manente refractione, quæ nimirum est necessaria ad obtinendam objecti imaginem efformandam in foco objectivi. Hinc ad determinandas curvaturas lentium adhibendarum ad id obtinendum, oportet nosse qualitates refractivas, & distractivas vitrorum, ex quibus eæ constare debent; ac ei operi destinatum est hoc primum Opusculum. Ego ad id maxime idoneum censeo usum prismatum, quorum superficies inclinatæ ad se invicem inducunt satis magnam separationem filorum heterogeneorum continuatam in recessu ab ipso prismate. Nihil autem est aptius ad eam rem, quam prisma ita efformatum ex una quapiam substantia, ut habeat angulum variabilem, cum quo comparentur prismata cæterarum substantiarum habentia singula suum angulum constantem. Ubi nimirum a

prismate variabili corrigatur refractio media, vel distractio prismatis habentis angulum fixum, deprehenditur vis refractiva, vel distractiva substantiæ ejusdem prismatis fi:i : si fuerint inæquales anguli; substantia, quæ minore angulo destruet effectum majoris anguli alterius, habebit majorem vim, & ope geometriæ determinabitur relatio earum virium per eos angulos: determinata autem relatione diversarum substantiarum .d illam eandem prismatis variabilis, determinabitur relatio iparum mutua ad se invicem.

6. Statim occurrit animo, quo pacto fieri possit prisma anguli variabilis ex aqua, quæ nimirum accipit ormam vasis eam continentis: id autem efformari potest ita, ıt sine effusione aquæ ipsius habeat inclinationem laterum oppcitorum jam majorem, jam minorem, permittat autem transitum radiorum per fenestras excisas ex ipsis lateribus, & munitas viris planis bene politis. Hujusmodi prisma est illud, quod ego parari curaveram, cujus descriptionem dedi in prima ex quinque dissertationibus (num. 2.): ipsam inde exscriptam proponam hic in supplementis hujusce Opusculi, adjecto alio ejus generis instrumento pro angulo variabili itidem aqueo, quod adhuc est magis idoneum ad usus nonnullos, & quod posterius excogitavi. Adhuc tamen & simplicius, & utilius est prisma habens angulum variabilem ex vitro. Videtur sane primo aspectu impossibile ejusmodi prisma, saltem satis idoneum. Clairautius adhibuit habens superficiem ex altera parte planam, ex altera curvilineam circularem, quæ superficies alibi aliam exhibens inclinationem ad planam sibi oppositam æquivalet prismati habenti angulum variabilem. Sed cum diversæ radii partes incidant in partes superficiei curvilineæ habentes diversam inclinationem ad superficiem planam; oritur ibi quædam dispersio, quæ reddit spectrum coloratum nimis confusum. Egregium ei malo remedium attulit Massiliensis Opticus P. Abat conjungendo bina vitra alterum plano-convexum, alterum plano-concavum, æquali utriusque sphæricitate. Dum illud per hoc excurrit; binæ superficies planæ mutant inclinationem ad se invicem, & obtinetur vitrum continuum terminatum binis superficiebus planis prorsus

sus æquivalens prismati vitreo habenti angulum variabilem. Ego addidi commodam eorum frustorum sectionem, ac excogitavi instrumentum, quod hìc propono, haud multum absimile circino proportionis, cujus alteri cruri affigitur alterum e frustis ita, ut ejus apertura major, vel minor exhibeat angulos diversos determinandos ope fasciarum quarundam: adjeci autem & lamellas quasdam, quarum ope determinatur per fascias ipsas angulus etiam prismatis fixi comparandi cum eodem variabili.

7. Ad commodum ejus instrumenti usum requiritur omnino instrumentum alterum, cujus ope radius solis possit in obscurum conclave induci positione proxime horizontali: id fit ope tubi exigui exiguo speculo metallico instructi, qui immittitur in foramen fenestræ, & dum gyrat circa proprium axem, converso itidem speculo circa alium axem priori perpendicularem, acquirit ipsum speculum positionem debitam admodum facile. Ipsum exhibui in dissertatione 1. num. 121. Hìc iterum exhibebo accuratius descriptum, ac præterea indicabo alia instrumenta ad faciliorem observationem idonea.

8. Descriptio novi instrumenti occupabit 6. paragraphos, quorum singulis singulæ ejus partes describentur: tum §. 7. exponentur reliqua instrumenta: succedent plures usus cum ratione observandi, ac deinde formulæ pro calculis, & exempla pro eruendis diversorum vitrorum viribus ex observationibus eo instrumento institutis, quarum demonstrationes exhibebo partim in hoc ipso Opusculo, partim in uno e supplementis.

9. Quid sit qualitas refractiva, & distractiva, fuse expositum est in prima ex illis quinque dissertationibus (num. 2.): hìc summam rei attingam. Quivis radius albus integer constat ex innumeris filis diversæ naturæ, quorum singula si adveniant ad oculum, excitant ideam singulorum colorum: reducuntur autem ad classes septem, & sunt rubeus, aureus, flavus, viridis, cæruleus, indicus, violaceus; sed secundus, & tertius vix quidquam a se invicem discrepant, ut quintus, ac sextus, quam ob causam multi quinque tantum exhibent colorum classes. Quodvis filum, dum transit oblique per superficiem dirimentem bina media diaphana hete-

heterogenea, inflectitur veluti fractus ibidem, qui flexus dicitur refractio: angulus incidentiæ dicitur is, quem continet cum recta perpendiculari ad superficiem refringentem radius adveniens ad punctum superficiei: angulus refractionis, vel ut ego ipsum appellare soleo, angulus refractus est is, quem cum ipsa perpendiculari producta continet radius progrediens refractus. Ubi superficies dirimit eadem media, quæcumque sit incidentia, sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti pro eodem filo colorato habet semper rationem eandem, cujus valor habetur dividendo illum sinum per hunc: idem valor est nonnihil diversus pro diversis filis coloratis in eadem superficie, minimus pro rubeis, maximus pro violaceis; quamobrem illa dicuntur omnium minime, hæc omnium maxime refrangibilia. Est itidem diversus pro eodem filo, ubi superficies refringens dirimit diversa media: quamobrem ubi radius ex aere abiens in diversas substantias habet diversos ejusmodi rationum valores, illæ substantiæ dicuntur habere diversam vim refractivam. Ubi radius incidit ex quapiam substantia in quampiam aliam, ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti est eadem, ac ratio posterioris ad priorem, ubi exit ex secunda in primam. Pro habenda qualitate refractiva accipitur valor rationis prioris in ingressu ex aere in eam substantiam, vel posterioris in ejus egressu ex eadem in aerem. Eum valorem soleo appellare m, ut olim Clairautius, quem hìc adhibebo pro medio inter extremos, maximum violaceorum, & minimum rubeorum pro quavis substantia. Differentiam inter valores m maximum, & minimum pertinentes ad primum rubeum, & postremum violaceum in eadem substantia, appellabo dm.

10. Valor m pro quovis filo determinato obtineri potest ope prismatis cujusvis habentis angulum fixum non nimis magnum, nimirum quemvis, per cujus superficiem utramque radius traduci possit, sed valor dm admodum difficulter obtineri potest, immo satis accuratus omnino non potest; quia primus rubeus utcumque satis proxime discernitur, extremus violaceus sensum effugit, violaceis per gradus insensibiles desinentibus in umbram

cæ-

cæcam: deinde nisi prorsus accurate determinentur bini valores *m* pertinentes ad bina fila, valor *dm* ab illorum differentia redditur prorsus erroneus, quia cum differentia binorum *m* sit admodum exigua, exiguus error in singulorum determinatione errorem inducit, qui sit pars magna totius valoris quæsiti. Sed illud commode accidit, quod pro adhibendis binis substantiis, satis est habere vero proximum, utut non prorsus accuratum, valorem medium *m*, ac solam rationem binorum *dm* ad se invicem: invento autem semel valore *m* proximo pro substantia, ex qua est elaboratum prisma variabile, facile ope hujus instrumenti obtinetur satis proxime tam valor *m* cujusvis alterius substantiæ, cujus habeatur exiguum prisma fixum, quam ratio valoris *dm* pertinentis ad eandem substantiam ipsius prismatis fixi, ad *dm*, qui pertinet ad substantiam variabilis; unde consequitur ratio valorum *dm* pertinentium ad substantias binorum prismatum fixorum. Idcirco hoc instrumentum est quædam veluti statera pro æstimandis qualitatibus substantiarum omnium. Appellari posset vitrometrum, si pro solis vitris adhiberetur: sed adhiberi potest etiam pro fluidis omnibus diaphanis infusis in prisma vacuum contentum parietibus vitreis bene politis, & ubique æque crassis.

11. Si adhibendæ essent tres substantiæ, quæ tres colores conjungerent; tum haberi deberet etiam discrimen inter rationes valorum *dm* pertinentium ad primum collatum cum secundo, & pertinentium ad secundum collatum cum tertio, quarum rationum differentia jam est secundi ordinis, adeoque multo minor, & multo difficilius determinanda sine errore. Difficultatem auget difficultas adhibendi inter immanem gradationum diversarum numerum ejusdem prorsus generis fila, ubi pro utraque substantia observationes instituuntur. Res quidem est admodum delicata, & indiget diligentia summa. Habeo tamen methodum, qua id ipsum directe, & admodum accurate præstari possit, quam itidem exponam in hoc Opusculo.

§. II.

§. II.

De prismate composito habente angulum variabilem.

12. Hoc prisma constat binis frustis vitreis, quorum alterum longius plano-convexum, alterum brevius plano-concavum. Primum exprimit figura 1 (Tab. 1), in qua ABC, DEF sunt binæ bases planæ, habentes formam segmenti circuli: ADFC est superficies plana rectangula, ABCFED est superficies convexa cylindrica, vel potius sphærica: hæ postremæ duæ debent esse bene politæ. Fig. 2 exhibet secundum frustum, in quo IMOK est superficies plana rectangula, GLNH superficies concava ejusdem curvaturæ cum priore convexa figuræ 1, ambæ politæ: IMLG, OKHN binæ bases planæ rectangulæ altitudinis GL æqualis AD figuræ 1, sed latitudo IG prioris est multo major, quam HK posterioris, quæ latitudines cum longitudine IK determinabuntur paullo inferius, GIKH, LMON sunt binæ bases mixtilineæ æquales.

13. Sphærica figura superficierum curvarum est magis idonea, quam cylindrica, quia facilius inducitur satis accurata. Radius sphæricitatis est arbitrarius: soleo adhibere pollicum circiter sex, ne si sit multo minor, determinationes evadant minus accuratæ. Numerus graduum in arcu ABC est arbitrarius: magnitudo satis idonea ad usus communes est inter 20, & 30. Quo major est crassitudo vitri, ex qua pendet sagitta BP, eo major is arcus sumi potest. Ea sagitta est sinus versus dimidii arcus ad eum radium, quæ pro 20 gradibus est lin. $1\frac{1}{9}$, pro 30 lin. $2\frac{1}{2}$, longitudo AC in primo casu linearum 25, in secundo $37\frac{1}{3}$. Altitudo AD, sive GL quo major, eo melior: satis est linearum 3, melior lin. 6, vel etiam major. Fieri potest IG æqualis BP ex lamina nimirum crassitudinis ejusdem, ubi longitudo IK sit minor dimidiâ AC: potest fieri tanto minor, ut HK remaneat non nimis exigua, ne nimirum id frustum remaneat ibi nimis fragile.

14. Ipsa HK (fig. 2), & tota forma basis GIKH sic facile deter-

determinabitur. Sit in fig. 3 basis ABC eadem, ac in 1. Ducatur AI perpendicularis chordæ AC, & æqualis sagittæ BP: sumpto arcu arbitrario AH minore, quam sit dimidium ABC, ducatur recta exigua HK parallela AI, donec occurrat in K rectæ IK parallelæ AC, & adjungatur litteræ A littera G ita, ut idem punctum indicent. Erit GIKH forma baseos figuræ 2. Expedit autem, ut in fig. 3 sint bene parallelæ IK, AC: in fig. 1, & 2 debent omnino esse satis accurate perpendiculares basibus altitudines omnes AD, CF, GL, IM, HN, KO; bene planæ, & politæ superficies ADFC, IMOK; accurate ejusdem curvaturæ, & itidem bene politæ superficies curvæ utriusque figuræ.

15. Tum si figura 2 adducatur ad primam ita, ut abeunte G in A, habeatur a binis basibus figura tertia; congruent superficies curvæ: plana autem polita ADFC, IMOK erunt inter se parallela: excurrente altero frusto supra alterum ita, ut superficies ipsæ curvæ se perpetuo contingant, inclinabuntur illæ superficies planæ ad se invicem, quæ si concipiantur productæ usque ad concursum, efformabunt ibi angulum minorem, vel majorem, pro minore, vel majore distantia a positione parallelismi. In fig. 4 procurrit HG ultra CBA versus A: & KI, CA productæ concurrunt in Q ex parte A: in fig. 5 abit A ultra G, & habetur concursus Q rectarum earundem ex parte C. Angulus Q metitur inclinationem eorum planorum ad se invicem. Radius autem lucis traductus per illa bina plana transibit eodem modo, quo transiret per latera prismatis simplicis habentis eundem angulum in Q; quamobrem poterit id appellari prisma variabile. Cum vero continuo excursu frusti alterius per alterum mutetur angulus Q; patet, id prisma habiturum angulum variabilem: & quidem angulus variabitur a zero parallelismi crescens utrinque per omnes magnitudines intermedias mutatione continua; ex parte A per paucos gradus, ex parte B per numerum graduum multo majorem priore, sed paullo minorem numero arcus ABC, cum G debeat remanere nonnihil citra C, ut nimirum superficies plana IK in fig. 5 non effugiat penitus superficiem planam AC.

16. Facile concipitur, arcum AG in fig. 4, & 5 fore mensuram

anguli Q. Si enim concipiantur ab A, & G bini radii usque ad centrum circuli ABC; ipsi in fig. 3 coinciderent in casu parallelismi, coincidentibus ibi A, & G: tum ii radii in fig. 4, & 5 inclinantur ad se invicem per angulum, cujus mensura est arcus AG: nova autem positio rectæ IK respectu AC debet acquirere eam inclinationem, quam acquirit radius respectu radii; cum eæ rectæ servent eandem positionem respectu ipsorum radiorum. Demonstratio geometrica accurata facile haberetur; si delinearentur ii ipsi radii, qui omittuntur, cum reddant figuram complicatiorem.

17. Hinc angulus Q prismatis variabilis obtineretur invento radio sphæricitatis, & aptato in circino proportionis exhibente chordas circuli ad numeros 60 more solito: nam distantia AG translata in eam scalam exhiberet angulum Q. Verum hoc pacto haberetur numerus graduum: minuta autem non nisi crassa æstimatione haberi possent. Accuratior haberetur determinatio; si in scalam exhibentem partes millesimas radii transferretur chorda AG accepta circino, & adhiberetur tabula sinuum: nam dimidium ejus chordæ est sinus dimidii arcus quæsiti. Verum accurata determinatio ejus chordæ ope circini esset admodum difficilis, ac molesta translatio ipsius in scalam post quamvis observationem, molesta consultatio tabularum: accedit, quod ex iis constat, in angulis paullo majoribus errorem unius millesimæ in chorda secum trahere errorem etiam quinque minutorum in angulo. Eam ob causam utilissimum est instrumentum, quod primo intuitu exhibeat eum angulum satis accuratum. Ejusmodi autem est instrumentum, quod hic propono, cujus ope illud etiam facile deprehenditur, ut patebit suo loco, ubi habeatur accuratus parallelismus, ne vitiosa constructio in errorem inducat.

18. Tam in superioribus methodis, quam in methodo adhibente hoc instrumentum pro accurata ejus constructione, oportet accurate nosse radium sphæricitatis superficierum curvarum. Is quidem facile obtinetur ope foci reflexi a superficie concava ad locum, a quo prodeunt radii. Dum radius solis appellit ad exiguum foramen fenestræ occlusæ; obducatur id charta alba, & per

hujus

hujus tractum illuminatum a sole traducatur filum sericum habens, ut solet, filamenta tenuissima aberrantia: collocetur pars plano-concava e regione ipsius chartæ, obversa ipsi cavitate; accedendo, ac recedendo deveniatur ad distantiam, in qua ad latus loci illuminati pingatur in parte obscura ipsius chartæ imago fili distincta cum illis tenuibus filamentis, quæ perquam exiguo accessu, vel recessu ab eo loco, statim incipiet amittere distinctionem, evanescentibus illis pilis tenuibus. Distantia imaginis distinctæ est utique radius sphæricitatis partis cavæ, adeoque etiam convexæ.

19. Verum alia faciliore methodo res perficietur æque accurate. Posito frusto majore super charta ampliore, & appressa digito basi superiore, notetur tenui cuspide acus, vel circini ductus superficiei convexæ ABC (fig. 3): applicetur secundum frustum ad primum prope alterum extremum: appresso hoc secundo frusto promoveatur primum CBA in *cba* ita, ut & ibi congruant sibi invicem satis magnæ binarum curvarum partes: notetur ut prius arcus residuus A*a*; ac ita porro continua promotione jam frusti minoris, jam majoris habebitur satis magnus arcus circuli, vel etiam integra peripheria, cujus diameter facile obtinebitur. Si errore applicationis exiguo non redeat in se figura prorsus accurate, sed proxime; accipi poterit dimidium exigui arcuum intervalli pro puncto, in quo debuissent conjungi ipsi arcus.

20. Posset fieri secundum frustum æquale priori; sed ea longitudo esset inutilis, ut patebit in usu; redderet autem nimis fragile id frustum, nisi vitrum esset nimis crassum. Posset effici, ut parallelismus superficierum haberetur in medio majore arcu, & tunc haberi posset utrinque angulus satis magnus: sed præstat ad usus, ad quos destinatur, ut is ex parte altera habeatur adhuc major, & ex altera satis est angulus perquam exiguus, usui futurus tantummodo ad videndam quandam inversionem spectri transeuntis in ipsa mutatione directionis anguli per radium album, qua habita, explicatio, & extensio major colorum, quæ ex utraque parte fieret eodem modo, satis bene obtinetur ex altera tantum. Posset effici majus frustum concavum, convexum minus, sed illud majus concavum esset multo fragi-

lius, quam convexum. Facto autem minore concavo, præstat ipsum objicere radio solis venienti, & efficere, ut convexum majus excurrat per ipsum, ut figuræ indicant; ne nimirum, excurrente minore, radius solis tenuis ingressus in conclave tenebricosum per foramen exiguum, cadat in eo motu extra minoris superficiem. Ut autem ipse radius commode traduci possit per utrumque frustum, dirigetur positione proxime horizontali ope machinulæ habentis speculum metallicum, de qua infra.

21. Potest frustum minus inverti, & collocari ita, ut parallelismus habeatur in altero extremo C in fig. *6*, quæ succedit tertiæ, succedentibus 7, & 8 figuræ 4, & 5, angulo exiguo translato e contrario ad C, majore ad A. Semper autem angulum prismatis metitur distantia a parallelismo.

22. Potest prisma variabile efformari e quovis vitro: ad quasdam observationes est aptius vitrum commune, ad alias vitrum, quod habeat majorem vim distractivam: habeo e vitro communi, e flint Anglicano, e flint Veneto, quod habet & refractivam, & distractivam vim adhuc majorem. Hoc postremum reliquis præferendum censeo.

§. III.

De basi, & fasciis circularibus instrumenti novi.

23. ID instrumentum exhibet fig. *9* (Tab. II). Ejus basis est quidam veluti circinus proportionis ACB sine lineis rectis ferentibus divisiones, cujus crura CA, CB possunt gyrando circa centrum C acquirere aperturam majorem, vel minorem, ut libet. Ejus positionem considerabimus in eo situ, in quo ipsum adhibere soleo, obvertendo fenestræ extremas crurum partes A, B, adeoque aspiciendo directione CA, CB, ut sit CA pars sinistra, CB dextera. Plura in eo notanda sunt: in hoc paragrapho agemus de fasciis circularibus, quæ habentur paullo ante finem crurum, ac sunt LM, NO.

24. Centrum curvaturæ debet esse in C, ac ipsa curvatura debet

bet esse accurate circularis, & accurate eadem in arcu extimo interioris, intimo exterioris. Altera debet esse longior, altera brevior: longior mihi solet esse interior, cujus arcum assumo graduum circiter 70; brevior exterior, pro qua satis sunt gradus 29, qui debent esse divisi in partes 30, ut quævis pars exterioris deficiat a quovis gradu interioris per $\frac{1}{30}$ unius gradus, nimirum per 2 minuta; unde pendet vis ejus, quem Astronomi huc usque dixerunt Nonium, nunc nonnulli appellandum censent Vernerum ab ejus nomine, quem censent ejus divisionis inventorem. Pro divisione majoris radius AC, ad arcum extimum translatus circino, in ipso arcu exhibet gradus 60, bissectio tricenos, horum trisectio denos, unde quini, & singuli derivantur. Numeri appositi sunt interiori fasciæ post denos quosque gradus, exteriori post quinas quasque partes 10, 20, &c, ob bina minuta deficientia post partes singulas: debent enim ii numeri exprimere defectum minutorum in præcedenti arcu ab eo, qui haberetur, si partes singulæ essent singuli gradus. Debent autem ita collocari ipsæ fasciæ, ut bina divisionum initia congruant clauso circino. In hoc schemate, in quo numeri abeunt a sinistra ad dexteram, debent congruere fasciarum extrema sinistra: posset effici, ut congruant dextera, sed eo casu numeri abirent a parte dextera ad sinistram, quod in nonnullis instrumentis præstandum curaveram.

25. Altera fascia alteri cruri debet esse affixa: hic longior LM est affixa cruri sinistro CA, brevior NO dextero CB. In hoc casu fasciæ minoris longitudo debet tendere tota versus partem sinistram, majoris pars maxima versus dexteram. Si deberent initia numerorum haberi in extremo dexteræ; pars minor deberet abire tota versus sinistram, quod quidem est commodius ex uno capite, cum ita possit affigi fascia major minus procul a suo medio puncto; sed numeri abirent contra ordinem, qui servari solet in legendo abeundo a sinistra ad dexteram. Posset etiam in casu congruentiæ initiorum ex parte dextera affigi minor fascia parti sinistræ, major dexteræ: ea omnia promiscua sunt; dummodo & cum reliquis partibus cohæreant, de quibus infra, & clauso in-

instrumento congruant bina zero, aperto autem excurrat initium minoris per arcum majoris.

26. Eæ fasciæ sunt destinatæ ad determinandam mensuram angularem aperturæ circini. Initium zero minoris indicat in arcu majoris eam mensuram; exhibet enim numerum graduum ab initio majoris: si quid superest, ut in hoc schemate habentur gradus 15., & superest adhuc sequentis gradus pars quædam; ejus mensuram exhibet nonius fasciæ exterioris. In ea priores lineolæ post zero præcedunt lineolas fasciæ interioris, & quo magis proceditur, eo minus, ob defectum binorum minutorum in singulis partibus exterioris. Devenitur demum ad loca, in quibus jam præcedunt interiores. Ubi pervenitur ad congruentiam, numeri adscripti fasciæ minori exhibent minuta; dummodo singulæ partes intermediæ inter binos numeros computentur pro binis minutis. In hoc schemate habetur concursus, ubi in fascia exteriore adest numerus 30. Idcirco aperturæ mensura illis 15 gradibus addit minuta 30. Si congruentia haberetur binis partibus post numerum 30 fasciæ exterioris (in hac determinatione respiciendum non est ad numeros interioris respondentes concursui); haberentur in apertura gradus 15 min. 34.

27. Singuli concursus hìc determinant minutorum binaria: singula minuta determinarentur; si tam singuli gradus interioris, quam singulæ partes exterioris secarentur bifariam aliis lineolis: nonius non solum exhiberet singula minuta, sed etiam æquivaleret duplici nonio, exhibens simul binas determinationes: nam congruentibus binis divisionibus, congruerent aliæ binæ distantes a se invicem per 30 partes fasciæ minoris, quarum determinationum altera exhiberet numerum minutorum ab initio gradus, altera a medio gradu. Possunt autem & hìc singula minuta haberi: nam ubi nullæ divisiones congruunt, habebuntur exterioris binæ, quarum prior præcedet, posterior præcedetur a lineola interioris; quod si accidat intervallis fere æqualibus, vel non nimis inæqualibus, tum numero minutorum, quem exhiberet concursus præcedentis, addendum est adhuc unum minutum. Hæc omnia per se patebunt iis, qui norunt nonii usum communem in instrumentis.

tis. Optimum factu erit, si divisiones binarum fasciarum sint insculptæ ipsis fasciis metallicis: adhuc tamen possunt etiam designari in charta crassiore, & agglutinari ipsis fasciis, sed cavendum ne glutine madefiat ipsa charta ita, ut divisionum magnitudo immutetur: id nequaquam accidet, si gluten applicetur soli fasciæ metallicæ. Possent itidem semel incidi divisiones multiplicandæ ope impressionis, uti fit pro sphæris armillaribus: sed cavendum ibi ab effectu madefactionis tam in impressione, quam in agglutinatione.

§. IV.

De mensulis pro prismate composito.

28. PAULLO ante fascias habentur binæ mensulæ P, Q pro sustinendis alte binis frustis prismatis compositi. Interioris, quæ debet esse major, superficies verticalis externa, & exterioris interna debent esse curvilineæ, quæ possunt fieri cylindricæ, sed curvaturæ ejusdem saltem proxime, quam habent arcus curvilinei basium utriusque frusti, & sint ita collocatæ, ut habeant centrum in C. Quamobrem ante earum collocationem potest designari arcus circuli centro C, intervallo radii ejus curvaturæ inventi §. 2, in superficiebus ipsorum crurum. Eæ bases debent esse affixæ ipsis cruribus singulæ singulis, & ipsis debent agglutinari bina frusta ita, ut superficies curvæ singulorum secundent basium superficies curvas. An bene suo loco stent; id apparebit aperiendo magis, vel minus circinum, donec appareat, ipsorum curvaturas sibi invicem ubique congruere, quod obtinebitur etiam, si mensularum superficies non habeant accuratam curvaturam, promovendo nonnihil ipsa frusta prismatis variabilis introrsum, extrorsum, sed ita, ut singula non nisi singulis mensulis adhæreant.

29. Applicatio frustorum ad mensulas potest fieri glutine quopiam, vel etiam ipso illo pane tenui, quo ad obsignandas litteras utimur; quod si fiat, satis firmiter cohærebunt, & facile etiam divelli poterunt, si opus sit, pro transferendo instrumento. Possent

sent etiam bina frusta firmiter agglutinari binis lamellis metallicis inferne, quæ habeant extantes metallicos cylindrulos singulæ binos, qui in mensularum foraminula immissi semper eandem positionem restituant. Sed id requirit accuratissimam foraminum positionem diligentissimi artificis; quæ tamen suppleri potest applicando ea frusta ipsis lamellis collocatis suo loco ope glutinis, vel ejus panis; ut nimirum ante exsiccationem reduci possint ad positionem illam debitam continuæ congruentiæ.

30. Ita disponi debent mensulæ, & super ipsis frusta, ut circino ad paucos gradus aperto, ut 5, vel 10, habeatur parallelismus, tum in aperturis majoribus excurrat totus longioris frusti arcus per minorem. Id facile obtinebitur, ex utravis parte fasciarum habeatur initium numerationis, utrivis cruri affixa fuerit fascia brevior, utrivis brevior mensula, & quovis ordine: potest enim mensula brevior aptari vel eidem cruri, cui aptata est fascia brevior, vel illi alteri, cui longior; & ab ea combinatione pendet etiam collocatio frusti minoris pro parallelismo; ut nimirum is habeatur versus marginem sinistrum, ut in fig. 3 (Tab. I), vel versus dexterum, ut in *6*.

31. In instrumento hic delineato (fig. *9* Tab. II) numeratio fasciarum incipit a margine sinistro, & fascia brevior affixa est cruri dextero, ut diximus superiore §. 3: mensula brevior e contrario affixa est cruri sinistro, & parallelismus habetur in margine dextero: hinc positio binorum frustorum prismatis variabilis respondet figuræ *6* (Tab. I), quæ requirit inversionem basium frusti minoris figuræ 2, ita nimirum, ut basis MONL remaneat inferior. Hæc positio est omnium commodissima ad usum; nam latus, cui est affixum frustum minus, debet inter observandum remanere immotum, obversa hujus superficie radio advenienti ita, ut ea ipsi perpendicularis sit, & eandem semper retineat primam incidentiam perpendicularem: ea permanens positio ejus frusti facile obtinetur, apprimendo digitis manus alterius superficiem ejus cruris ad tabellam, cui imponetur, juxta ea, quæ dicemus infra in usu, & movendo alterum crus manu altera ad variandam aperturam. Porro commodius est hunc motum præstare manu dexte-

ra,

ra, quam sinistra, adeoque potius sinistro, quam dextero cruri affigendum est frustum minus. Appresso autem hoc crure ita, ut remaneat apertura graduum 5, vel 10, parallelismus habitus in margine dextero utriusque frusti relinquet partem majoris procurrentem ultra minus ad sinistram, ut in fig. *6*: imminutâ, vel auctâ aperturâ, idem frustum majus abibit respectu minoris ad sinistram, ut in fig. 7, vel ad dexteram, ut in fig. 8, angulo superficierum planarum orto in primo casu ex parte dextera, & in secundo ex parte sinistra; dum superficies curvæ perpetuo congruunt, & e binis frustis efformant unicum prisma. In hoc excursu fascia minor affixa ipsi cruri mobili excurret per majorem ita, ut ejus zero positum in margine sinistro discedat, dum angulus augetur, a zero fasciæ majoris versus dexteram, & numeros graduum arcus relicti, qui metitur aperturam, exhibeat legendos ordine naturali a sinistra versus dexteram.

32. In aliis instrumentis aliter rem disposui. In quibusdam fascia major adnexa est cruri sinistro, minor dextero, ut hic, & initia numerorum sunt ex parte sinistra; sed mensula minor affixa est eidem cruri dextero, quo casu debuit parallelismus induci circa marginem dexterum. Et quidem, ut monui, tunc nexus fasciæ majoris cum crure suo sinistro præstatur magis prope ipsius medium, dum in priore dispositione relinquitur fere totus ad dexteram, quod paullo majorem ipsius crassitudinem requirit ad habendam eandem instrumenti firmitatem, nisi quis malit minorem fasciam NO (fig. *9* Tab. II) efficere paullo longiorem, relicta parte ipsius versus O sine divisionibus, ut sinister margo paullo magis ad lævam procurrat, & eodem promovendam nonnihil indicet fasciam longiorem. Verum in hac secunda dispositione motus præstari debet manu sinistra applicata ad crus sinistrum, quod est minus commodum.

33. In aliis affixi quidem & fasciam, & mensulam minorem cruri sinistro, quo pacto parallelismum præstiti circa marginem dexterum, & motus habetur ibi cruris dexteri, ut in prima dispositione; sed numeratio graduum incipit a parte dextera, & motu retrogrado abit versus sinistram. In eo casu fere tota fascia

major tendit itidem versus partem alteram, nimirum versus sinistram. Ea omnia sunt arbitraria; dummodo parallelismus habeatur circino parum aperto, & in augenda apertura frustum majus, quod extat ultra minus, reducatur versus ipsum minus: commodissima autem videtur dispositio, quam in hoc schemate proposui, dummodo satis crassæ sint fasciæ, ut major longius excurrens ultra nexum firma remaneat. Motus præstatur manu dextera, & numeri naturalem ordinem servant a sinistra ad dexteram.

34. Quoniam mensura anguli prismatis variabilis est (num. 16) differentia positionis novæ a positione parallelismi; eam exhibebit differentia aperturæ instrumenti ab apertura, quam id habebat in parallelismo: porro facilius habebitur hæc differentia; si parallelismus semper habeatur in certo numero graduum aperturæ, qui semper demi debeat ab aperturæ majoris mensurâ exhibitâ immediate ab instrumento. Id autem facile obtinetur ante glutinis exsiccationem: aperto enim circino ad certum numerum graduum, quem indicant fasciæ jam constitutæ, & posito instrumento super mensa quapiam ita, ut possit excipere radium solis ab altera machinula, de qua infra, directum proxime horizontaliter; notetur in pariete opposito locus imaginis solis, ad quem ea tendit, sublato hoc instrumento: tum hoc posito ita, ut radium transmittat per superficies planas, ita promoveatur frustum alterum, ut ea imago redeat ad locum naturalem: id erit indicio, superficies esse accurate parallelas, ac in ea positione remanebunt post glutinis exsiccationem: verum oportebit rem præstare celeriter, nisi adhibeatur heliostata quidam ad impediendum effectum motus solaris, de qua re iterum infra, ubi de usu instrumenti.

35. Mensularum altitudo est arbitraria: satis est ita elevent prisma compositum, ut radius per ipsum traductus effugiat cæteras instrumenti partes anteriores, de quibus paullo inferius. Debet minor mensula esse amplior, quam pro excipiendo frusto minore; ut nimirum post ipsum adjungi possit unum, vel plura alia prismata simplicia ad eos usus, de quibus infra. Si major mensula fuerit itidem multo amplior, quam videatur requirere fru-

frustum ipsi aptandum ; facilius affigetur nexu fortiore, & poterunt ipsi ad latus imponi simplicia prismata ad videndum seorsum ipsorum effectum. Possunt mensulæ esse ligneæ : fasciæ ad firmitatem debent esse metallicæ : crura circini possunt esse vel metallica, vel lignea, ut libet, sed metallica præstant.

§. V.

De Cylindro, & Cochleis præstantibus mutationem aperturæ lentam.

36. APERTURA circini potest facile augeri, vel minui applicando digitos ad extrema capita A, B crurum, quæ extant ultra fascias, vel potius ad hoc, ut frustum minus prismatis variabilis perstet immotum, apprimendo digitis manus alterius superficiem cruris, cui id est adnexum, & applicando digitos alterius manus ad caput cruris alterius, juxta ea, quæ diximus num. 31 : potest etiam singulis cruribus affigi in superficie lateris extimi brevis lamella verticalis, cui applicati digiti motum reddent faciliorem. Et hoc quidem pacto inducetur facile quivis motus ingens. Verum in omnibus instrumentis illud evadit maxime commodum, si habeatur aliquid, cujus ope exiguus etiam motus induci possit, quin id impediat facilem motum ingentem. Id obtinebitur ope machinulæ, quæ mensulas præcedit.

37. Habetur ibi cylindrus VT solidus, qui ex parte T desinit in prisma quadratum solidum, quod hic non apparet, quia immittitur intra prisma cavum R : idem autem cylindrus solidus transit per cylindrum cavum S. Prisma R, & cylindrus cavus S ita connectuntur inferne cum cruribus, ut converti possint in gyrum, ut nimirum in quavis circini apertura ductus cavi jacere possint in directum, & solidum cylindrum cum sua directione recipere. Cylindrus cavus habet ad latus cochleam prementem Y, quæ conversa de more, comprimendo cylindrum solidum, ipsum connectat cum cavo, conversa in partem oppositam ipsum liberet. Prismati cavo R adhæret, sed revolubilis, cylindrus desinens

interne in cochleam solidam, quæ immittitur in cavam excavatam in ipso capite quadrato cylindri solidi, externe vero in manubrium X, quo converso promovetur antrorsum, retrorsum illud ipsum caput quadratum solidum intra cavum, adeoque & totus cylindrus TV.

38. Compresso igitur cylindro TV per cochleam Y, motus manubrii X removet crus alterum respectu alterius, vel admovet, aucta circini apertura, vel imminuta, quod quidem fit motu admodum lento, adeoque mutatione exigua. Liberato cylindro per oppositam conversionem cochleæ Y, statim habetur priore methodo ope digitorum applicatorum ad crura motus ingens facilis: momento temporis convertitur cochlea Y, quæ pressionem inducit, & ope manubrii X præstat motum exiguum. Inter observandum, motus ille ingens adducit instrumentum ad locum proximum debito, hic posterior lentus accurationem præstat. Id quidem deest in vitrometro, de quo supra num. 6, in quo habetur tantummodo motus lentus, quod quidem est admodum incommodum: posset autem reddendo instrumentum paullo magis compositum, ibi etiam induci motus vel celer, vel lentus ad arbitrium.

39. Dum circumagitur manu dextera manubrium X, debet apprimi digitis manus sinistræ crus ferens frustum minus, ne mutetur incidentia per ejus motum, sed ut relinquatur motus totus cruri alteri. Facile ope alterius machinulæ, vel ceræ mollis posset reddi immobile crus illud ita, ut adhuc possit initio collocari in ea positione, quæ necessaria est ad diversas observationes: nam collocatio ipsius immobilis semper eadem turbaret experimenta nonnulla. Verum pressio inducta digitis eundem effectum præstat multo facilius.

§. VI.

De lamellis centro proximis.

40. PROPE centrum habentur lamellæ destinatæ ad deprehendendam facile mensuram anguli prismatis cujusvis exigui simplicis. Ejus-

Ejusmodi prisma videre est in fig. 10 (Tab. II): BAC, EDF sunt binæ bases triangulares æquales, quæ in ea figura concipi possunt horizontales, quam ipsam positionem habebunt in instrumenti usu: EBCF est facies rectangula verticalis erecta supra basim BC trianguli BAC: ABED, ACFD sunt binæ facies laterales itidem verticales, quæ solæ debent poliri. Satis est, si angulus BAC sit 15, vel 20 graduum, quod obtinebitur, si BC sit circiter pars quarta, vel tertia longitudinis AC; vel AB. Altitudo AD potest esse vel paucarum linearum, vel multo major; longitudo AC itidem trium etiam linearum, vel paullo major, ut possit excindi ex lamina non ita crassa ita, ut binæ facies politæ respondeant amplioribus laminæ faciebus, non illis arctis, quæ crassitudinem terminant, quo sensu si excindantur, occurrunt multo plura plurium vitrorum vitia, & potissimum in quibusdam strata inæqualis densitatis, quo vitio solent laborare potissimum laminæ e flint. Verum si crassitudo vitri ferat eas facies longiores, quo longiores fuerint, eo accuratius determinabitur prismatis angulus.

41. Hujusmodi prisma, vel etiam prisma majoris anguli, debet excindi ex illo vitro, in cujus qualitates refractivas, & distractivas inquiritur ope hujusce instrumenti. Potest etiam excindi unum, vel alterum etiam exiguum hujusmodi prisma ex illa eadem substantia, ex qua constat prisma variabile, ad augendas ipsius vires. Contineat prisma variabile in frusto majore arcum aliquanto majorem gradibus 20, ut nimirum ejus angulus devenire possit ad gradus 20: habebitur in eo scala omnium angulorum a zero usque ad 20 gradus tantummodo. Si adjungatur frusto minori prisma habens gradus 20, tum frusto majore reducto ad parallelismum, inducatur ejus motus, ut prius; habebitur scala a 20 ad 40. Addito eodem pacto secundo prismate simplici graduum 20, habebitur motu eodem scala a 40 ad 60. Prisma ita adjectum exhibet in fig. 5 IKL.

42. Prisma simplex usui erit etiam pro liquoribus, in quo facies (fig. 10) BAC, EBCF possunt esse metallicæ, latera DABE, DACF e laminis vitreis æqualibus, & accurate politis, atque

atque ita adnexis illis binis metallicis lamellis, ut aqua contineri possit immissa superne per aperturam DEF. Optimum autem erit ita eas vitreas lamellas applicare, ut neutra basis extet ultra ipsas extrorsum, quod erit partim necessarium, partim admodum utile ad habendam mensuram anguli BAC, sive EDF. Illud autem in omnibus hisce prismatis apprime cavendum est, ut facies politæ sint accurate perpendiculares basi infimæ, cui insistunt.

43. Deprehendendo ei angulo destinatæ sunt laminæ, de quibus hic agimus: eas exprimit figura 9 prope centrum C. Binæ horizontales I, & H affixæ sunt ope cochlearum binis cruribus, altera longior, altera brevior, deficiente parte hujus propiore centro C. Ipsis afferruminatæ habentur binæ verticales DE, FG, quæ debent ita respondere faciebus internis crurum lateralibus, ut clauso instrumento congruant, & tendant ad ipsum centrum C. Pars laminæ verticalis ED a lamina H usque ad centrum debet esse nonnihil elevata, ut sub ipsa possit excurrere lamina horizontalis K habens formam sectoris circularis, & adhærens laminæ verticali FG. Ipsa debet esse tanquam pavimentum quoddam, quod sustineat prisma figuræ 10 ipsi impositum cuspide spectante C. Debet apertura circini variari, donec appareat, latera polita prismatis accurate congruere secundum totam suam longitudinem cum laminis verticalibus. Tum apertura circini determinata a nonio in arcu LM fasciæ longioris exhibebit angulum prismatis. Patet enim, ipsum fore æqualem angulo laminarum verticalium, & angulum harum angulo aperturæ circini; si clauso ipso circino, & nonio notante zero, congruunt ipsæ verticales laminæ.

44. Illa positio laminarum verticalium continuata a longioribus circini cruribus supplet exiguam longitudinem laterum exigui prismatis, quæ non permitteret determinationem ne gradum quidem integrorum accuratam ejus anguli. Proposui aliam methodum determinandi eum angulum in dissertatione veteri prima e 5 Viennæ editis num. 175, & 176: verum ope hujus instrumenti is multo facilius, & accuratius immediate obtinetur. Et hoc quidem

dem pacto exposita sunt omnia, quæ pertinent ad hoc instrumentum.

§. VII.

De aliis quibusdam instrumentis vel necessariis, vel utilibus ad hujus usum.

45. MACHINA necessaria ad usum expeditum hujusce instrumenti est ea, qua radius solaris commodam directionem obtinet, cujus mentio superius injecta est pluribus locis. Eam exhibet figura 11, ac etiam melius figura 12, in qua habetur ejus sectio per axem. In fig. 11 habetur tubus cavus cum operculo AB; quod habet rotundum foraminulum C: potest autem removeri, & relinqui ipsum os tubi apertum, tum facile occludi operculo restituto: EF, HI sunt binæ lamellæ adnexæ internis lateribus tubi, quibus inseritur axis habens adnexum speculum metallicum D ita, ut in eo motu circulari transeat axis conversionis mente conceptus per superficiem speculi politam, quod quo pacto fieri possit, exhibet figura 13, de qua inferius num. 49. Motus speculi circularis præstatur ope binarum trochlearum connexarum invicem per filum continuum ipsis advolutum: altera patet in G, altera adnexa manubrio K latet intra tubulum ipsum: prominet annulus LM, qui discriminet partem machinulæ ILMF intrudendam intra foramen excavatum in ligno fenestræ occlusæ, a parte ALMB, quæ debet remanere intra conclave.

46. Motu tubi circa proprium axem, & manubrii K moventis speculum motu circulari, facile obtinetur positio speculi D, quæ inducat directione requisita radium solis siti ubicumque ita, ut ejus lumen appellat ad eam fenestram. Ad obtinendam facile positionem speculi, quæ radium immittat positione ad horizontalem accedente, poterit detrahi operculum AB, quo detracto apparebit & positio speculi, & radius ab ipso redditus intra tubum, adeoque & motus requisitus ad id, ut idem radius ingrediatur conclave ipsum. Is radius erit amplior, & habebit margines male distinctos: addito operculo, apparebit in oppositi-

posito pariete imago solis multo magis distincta, transmissa nimirum per foramen C exiguum, quæ per motum tubi, & manubrii K facile adducetur ad eam positionem accuratam, quæ ad observationes instituendas requiretur.

47. In fig. 12 apparet melius operculum AB cum foramine C impositum orificio RS tubi aperto, trochlea N adnexa manubrio K, & connexa per filum cum trochlea GG adnexa axi IF ferenti speculum D, & nexus laminarum HI, EF deferentium axem ipsum, ac superficies interna tubi. Applicantur laminæ superficiei internæ, non externæ, ne ipsæ, vel procursus axis ultra ipsas in I, & F impediat liberam immissionem partis tubi HLME intra foramen fenestræ. Si tubus ipse sit metallicus, & foramen æquale ejus diametro excavatum in lignea tabula, motus ipsius tubi & celer, & lentus circa proprium axem fit egregie sine ullo subsultu, sola manu applicata ad partem tubi internam prope operculum AB: si foramen sit justo amplius; facile est remedium ope chartæ advolutæ ipsi tubo. Trochlea interna N debet esse admodum exigua, & externa GG multo amplior, ut figura 12 exhibet, sed non ita ampla, ut transire non possit per foramen fenestræ, in quod immitti debet pars tubi anterior: ita motus speculi erit lentior: posset eadem esse brevior, sed motus evaderet minus lentus.

48. Potest, si libeat, vel ope adjectarum laminarum, vel ope cochleæ perpetuæ reddi multo etiam lentior uterque motus circularis tubi, & speculi; sed machinula evadit complicatior; dum hæc simplicissima abunde est ad experimenta facile, & accurate instituenda. Filum debet esse singulis trochleis circumvolutum, & res melius procedit, si dum abit ab altera ad alteram, se decusset. Speculi figura potest esse formæ quadrangularis, sed oblongæ, vel ovalis nonnihil oblongæ, ut figura exhibet: oblonga requiritur ad excipiendum satis amplum radium solis etiam obliqui: ejus speculi etiam positi in directione longitudinis tubi nulla pars, ne exigua quidem, debet ingredi tubum citra HE, ne hujus umbra impediat appulsum radii ipsius ad speculum: debet ipsum speculum esse metallicum, nam in vitreo habentur duæ reflexio-

flexiones, & secunda quidem vividior, cum binis refractionibus, quæ vim observationum turbarent.

49. Formam axis exhibet fig. 13, ubi recessus DO, D'P relinquit locum crassitudini speculi ita collocati, ut ejus superficies polita DD' remaneat in directione axis conversionis: Eo pacto ejus centrum respondebit semper directe foramini tubi C fig. 11 (Tab. II) posito in ejus axe. Eo pacto brevissimum speculum mittit radium satis amplum ad foramen ipsum in positione ipsius utcumque obliqua, sole etiam parum admodum supra horizontem elevato, & parum remoto a directione axis tubi; dum in collocatione usitata pro microscopiis solaribus opus est speculo nimis oblongo. Hæc machinula perquam exigua esse potest: tubi diameter, satis est, sit pollicum duorum, vel $1.\frac{1}{2}$, longitudo 3, vel etiam 2, procurrente dimidio pollice ultra LM: speculi diameter brevior potest esse etiam tantummodo dimidii pollicis: longior unius abunde est: eo pacto procursus laminarum EF, HI erit dimidii pollicis, & tota longitudo totius machinæ circiter trium pollicum. Patet autem, omnes hasce mensuras esse prorsus arbitrarias.

50. Requiruntur adhuc plura alia ad observationem commode instituendam hoc instrumento, ut & vitrometro illo alio, de quo supra num. 6: hujusmodi est mensula ABC (fig. 14 Tab. III) horizontalis applicanda ad fenestram ita, ut facile removeri possit, & restitui: remanebit autem horizontalis ope transversalis fulcri DE inferne adnexi ipsi mensulæ: ea applicatio, & appensio fieri facile potest ope duplicis lamellæ perforatæ, quæ sit affixa verticaliter lateri posteriori ipsius mensulæ, & inseratur binis clavis horizontaliter infixis in ipso fenestræ ligno infra foramen K destinatum ad excipiendum tubum figuræ 11 in distantia idonea ab eodem, qui clavi sursum ad angulos rectos intorti sint, ut apparet in fig. 15 in L cum forma lamellæ perforatæ in M. Tum (fig. 14) erit opportuna alia tabula plana FGHI instructa 4 cochleis oblongis innixis mensulæ, quarum ope ea possit elevari, & deprimi. Ipsi imponendum erit instrumentum figuræ 9 (Tab. II), ita elevando, vel deprimendo ope cochlea-

rum eam tabulam, ut radius transmissus per foramen C figuræ 11 transeat per prisma variabile extans supra binas mensulas instrumenti ipsius.

51. Erit etiam opportunus heliostata quidam simplex, qui paratur admodum facile, & præbet radio solis adhibendo in observatione immobilitatem, a qua nomen accepit alius ille notus in physica experimentali habens rotas more horologii, qui quidem & nimis magno pretio constat, & multo difficilius admittit collocationem opportunam pro observationibus. Hoc instrumentum est admodum commodum ad determinandam qualitatem refractivam. Constat tripode, cui imposita est tabella horizontalis in eadem altitudine supra pavimentum, quam habet mensula ABC figuræ 14 (Tab. III). Ei tabulæ adnectitur altera verticaliter erecta applicata uni ex ejus lateribus ita, ut extet tota supra planum prioris. In hac tabella verticali debet haberi exiguum foramen, vel potius in ipsa excavari debet fenestra amplior, & ipsi ita adnectendæ sunt regulæ cum crenis quibusdam excipientibus tabellas alias, quarum ope foramen exiguum excavatum in una ex ipsis moveri possit tam sursum, & deorsum, quam in latus. Collocatur ea machina in aliqua distantia a fenestra, & radius transmissus per foramen C figuræ 11 (Tab. II) dirigitur ad eam tabellam verticalem ita, ut ejus foramen jaceat intra circulum imaginis solaris expressæ ibi ab ipso radio, quæ ob magnitudinem diametri apparentis solis erit semper multo major eo foramine. Ejus imaginis pars transmissa per id foramen secundum abibit in oppositum parietem, & ibi manebit fixa referens circellum lucidum immobilem; licet interea tota solis imago moveatur per ipsam tabellam verticalem ob solis ipsius diurnum motum. Ubi imago eo motu evadit ultra foramen ita, ut ipsum non complectatur; exiguo motu machinæ figuræ 11 retroagitur ita, ut iterum idem foramen intra ipsam cadat. Hoc pacto a socio dirigente identidem radium, & ipsum revocante ad foramen, habebitur in pariete imago solis semper immota, quamdiu libuerit: interea tabulæ horizontali imponi poterit alia illa FH figuræ 14, quæ cochleis instructa elevari potest, ac deprimi: instru-

strumentum figuræ *9* ipsi impositum excipiet radium transmissum per foramen secundum ita, ut transeat per prisma variabile, & radius ad ipsum appellet directione permanenti cum constanti angulo incidentiæ.

52. Erit necessarius pro nonnullis observationibus duplex heliostata, licet unicus sit satis pro iis, quæ instituendæ erunt pro lentibus acromaticis, quæ constent binis tantum substantiis, & conjungant bina tantummodo radiorum coloratorum genera. Erit autem opportunum, & pro nonnullis observationibus necessarium instrumentum, quod exhibet figura *16* (Tab. III) cum alio exhibito in figura 17: prius illud adhibebitur pro determinando puncto cujuspiam rectæ lineæ horizontalis descriptæ in pariete, in quod cadit perpendiculum in eam ductum ex dato quopiam puncto, ut ex centro foraminuli figuræ 11, vel ex eo puncto prismatis, in quo radius quipiam ex eo egreditur: hoc posterius ad habendam magnitudinem perpendiculi ipsius. In fig. *16* EE', GG' sunt binæ regulæ latiores connexæ inter se in positione proxime perpendiculari ope obliquarum H, H': erit opportuna longitudo trium, vel quatuor pedum pro regulis EE', GG': prope extremum G posterioris notetur punctum F circa mediam ejus latitudinem. Infixis binis acubus virgæ cuipiam ad distantiam paullo longiorem distantiâ FG' in positione ad sensum perpendiculari ipsi baculo, & posita altera in F, inveniantur ope alterius in latere exteriore regulæ EE' bina puncta L, L', quorum intervallo diviso bifariam in G' notetur id punctum in eodem latere. Patet, rectam FG' fore perpendicularem illi lateri EE': ac si in ipsa GG' notetur semel punctum F' prope G', recta, quæ transeat per puncta FF', erit utique semper perpendicularis eidem lateri EE'. In figura 17 AB est regula longior habens cuspidem BC positam accurate in directione ejus lateris AB exacte rectilinei. Ad plures observationes erit utilis distantia AC pedum circiter sex: sed omnino oportebit nosse accurate ejusmodi longitudinem in partibus scalæ cujuspiam.

53. Ad plures observationes facilius instituendas erit etiam admodum utilis regula alia bene complanata, quæ affigatur parieti

 in

in positione ad sensum horizontali habens faciem verticalem altitudinis circiter pollicum 4 e regione foraminis fenestræ, ad quod applicatur instrumentum figuræ 11. In ea facie ducenda erit per medium ipsius recta horizontalis, in qua invenietur punctum, in quod cadit perpendiculum ductum in ipsam e centro foraminis ipsius figuræ 11. Inde fiet divisio ejusdem lineæ in partes æquales, ut binorum pollicum, quæ ope scalæ, vel circini proportionis subdividi possint in numerum ingentem partium exiguarum, quarum numerus contentus in regula AC figuræ 17 sit cognitus. Per eas divisiones duci poterunt in eadem facie rectæ perpendiculares ipsi (*). Utilis erit alia regula ipsi perpendiculariter adnexa inferne habens longitudinem, & faciem horizontalem, quæ sustineat regulam EE' figuræ 16, vel caput A regulæ AB figuræ 17 tum, cum applicari debebunt faciei verticali prioris earum binarum regularum. Quo pacto ope instrumenti figuræ 16 possit inveniri illud perpendiculum, quod debet esse initium earum divisionum, dicemus infra §. 9. Hæc instrumenta erunt adhibenda pro determinanda qualitate refractiva, & distractiva materiæ prismatis variabilis: at ubi ea fuerit semel inventa; ad habenda ea, quæ requiruntur pro telescopiis adhibentibus binas tantummodo substantias componentes ipsorum acromatismum, satis erunt sola instrumenta figuræ 9, 11, 14, adjecto illo heliostata adeo simplici ad faciliorem determinationem.

(*) Optimum erit, si quævis pars lineæ horizontalis ductæ in ea regula contineat partem quinquagesimam distantiæ AC figuræ 17, quæ cum debeat esse longior uno pollice, poterit facile ope scalæ instructæ transversalibus dividi in particulas 100. Duplus numerus ejusmodi particularum, qui habebitur ab initio ejusmodi divisionum, exhibebit partes decimas millesimas totius longitudinis AC.

§. VIII.

§. VIII.

Primus usus instrumenti. Genesis colorum ex radio albo, & inversio spectri.

54. PRIMUS usus instrumenti ostendet ortum colorum, quos educit refractio e radio albo transeunte per prisma anguli variabilis, sive genesim spectri colorati, quam animo ingeret per spectaculum sane jucundum. Pro genesi colorum satis erunt instrumenta figuræ 9, 11, 14 sine heliostata, sine quo habetur imago solis & vividior, & melius terminata, adeoque aptior ad hunc usum. Applicato tubo figuræ 11 ad foramen fenestræ, & infra ipsum mensulâ figuræ 14 cum tabella instructa cochleis, collocetur supra hanc instrumentum figuræ 9 (Tab. II). Objiciantur (num. 23) radio venienti extrema crura A, B ita, ut radium primo excipiat superficies plana frusti minoris prismatis variabilis, & appresso tabellæ (num. 31) digitis manus alterius eo crure, cui affixum est id frustum, adducatur manu altera alterum crus ad eam aperturam, in qua binæ superficies planæ sint ad sensum parallelæ. Satis est pro hoc usu habere parallelismum proxime talem, qui obtinetur etiam sola inspectione frustorum. Accurati parallelismi apertura erit determinanda pro sequentibus usibus, cujus inventionem docebimus infra per regressum imaginis solaris ad locum naturalem, quem occupat remoto instrumento: ea semel inventa, licebit adducere crura ad positionem parallelismi etiam accurati ope nonii, antequam instrumentum imponatur tabellæ.

55. In ea positione imago solis apparet rotunda, & alba sine ullis coloribus. Verum auctâ, vel imminutâ aperturâ instrumenti, oritur angulus prismatis variabilis ex altera parte, & imago abit in pariete a loco naturali ad plagam oppositam vertici ejus anguli, ac incipit tingi margo ipsius tam dexter, quam sinister coloribus, alter rubeo, & flavo, alter violaceo, & indico ita, ut semper rubeus sit propior loco naturali, violaceus remotior.

Col-

Collocatio frustorum prismatis in instrumento determinat plagas ejus anguli, & colorum. In ea collocatione, quam exhibet figura 9 juxta num. 31, clauso magis instrumento angulus oritur ex parte dextera respectu aspicientis ipsum directione CA, nimirum respectu aspicientis fenestram, adeoque spectrum abit in pariete ad partem sinistram ipsius, quæ est dextera respectu aspicientis parietem, & ipsum spectrum: respectu hujus color rubeus remanet ex parte sinistra minus refractus, violaceus magis refractus remanet ex parte dextera: sed imaginis recessus ex ea parte non potest esse, nisi exiguus. At aperto instrumento magis, quam in casu parallelismi, angulus incipit haberi ex parte sinistra respectu aspicientis fenestram, adeoque spectrum abit ad partem sinistram respicientis ipsum, & parietem, & color rubeus occupat marginem dexterum, violaceus sinistrum spectri. Quotiescumque frustum minus respectu majoris habebit dispositionem, quam habet in ea figura, nimirum quotiescumque parallelismus habebitur eo appellente ad marginem frusti majoris dexterum respectu aspicientis fenestram, ut in fig. 6 (Tab. I), fuerit autem affixum cruri sinistro, ut hîc; ea omnia ita evenient, ac ea collocatio est idonea pro conclavi, in quo paries ab illo perpendiculo in eum demisso, est satis amplus ex parte sinistra ad excipiendum excursum majorem spectri. Sed si paries ex ea parte deficeret, & basis frusti minoris esset affixa cruri sinistro, ut hîc; oporteret invertere frustum minus ita, ut ejus facies, quæ erat superior, evaderet inferior, ac margo dexter fieret sinister, & vice versa. Facta ea mutatione, parallelismus juxta num. 21 haberetur appellente frusto minore ad marginem sinistrum majoris, ut in fig. 3: aperto magis instrumento haberetur excursus spectri minor ad partem sinistram; eodem magis clauso excursus major ad dexteram, coloribus alterius marginis occupantibus plagam, quam prius occupabant colores alterius oppositi.

56. Ubi auctâ aperturâ instrumenti post parallelismum, imago prius alba recesserit a loco naturali, colores in binis marginibus paullatim augebuntur, manente adhuc albedine in medio. Margo dexter propior loco naturali apparebit rubeus cum adjacente aureo,

reo, & flavo, sinister violaceus cum adjacente indico, & cæruleo: viridis apparebit in medio in margine superiore, & inferiore spectri ita nascentis, ubi radii diversorum colorum non permiscentur, qui omnes sunt permixti versus centrum spectri. Nam color unusquisque efformat suum circulum, vel ellipsim eo magis oblongam, quo magis radius recedit a positione perpendiculari ad parietem, sed appellabo circulum brevitatis causâ imaginem a quovis filorum genere efformatam. Hi circuli, ubi nulla adest sensibilis refractio, concurrunt simul omnes, & pariunt colorem album. Ubi refractio eos detorquere incipit, circulus extremus violaceus procurrit omnium maxime, tum alii gradatim, donec deveniatur ad primum rubeum, qui detorquetur omnium minime. Hinc in extremo margine dextero remanet pars purissima solius rubei, in extremo sinistro solius violacei. Paullo interius jam habentur prope rubrum conjuncti rubeus cum aureo, tum cum aureo, & flavo, ac deinde cum aliis, donec deveniatur ad initium extremi circuli violacei, ubi jam omnium conjunctio album gignit. Idem accidit violaceo per indicum, cæruleum, & reliquos veniendo ab extremo margine sinistro versus medium. In summo, & imo margine nulla mixtio haberi potest, ne in media quidem ejus longitudine, ob formam circuli se contrahentis in iis verticibus diametri verticalis, ubi idcirco apparet viridis in summo vertice purus, paullo inferius mixtus cum flavo & cæruleo, quibus deinde in minore distantia a centro admiscentur etiam aureus, & indicus, ac demum etiam violaceus, ubi nimirum jam obtinetur albus ob mixtionem omnium simul; dum propius respectu marginum superioris, & inferioris semper habetur viridis in extremis ipsis marginibus purissimus, sed tenuis, ac in exiguo recessu ab ipsis vividior, sed magis dilutus, & accedens ad album.

57. Quo magis aperitur circinus, eo magis crescit angulus prismatis, refractio, separatio colorum: recedit spectrum a loco naturali adhuc magis, dilatantur colores marginum extremorum, & explicantur magis, medio albo paullatim attenuato, qui si frustum majus prismatis variabilis extendatur ultra 30 gradus, etiam eva-

evanescit, ita jam remotis a se invicem violaceorum, & rubeorum centris, ut nullæ ipsorum partes coincidant, adeoque nullibi habeatur mixtura omnium simul (*).

58. Claudendo paullatim circinum motu contrario lateris CB (fig. 9 Tab. II), minuitur refractio cum angulo refringente, accedit spectrum ad locum naturalem, redit albedo media, attenuantur colores marginales, remanente tamen semper rubeo ad dexteram spectri, violaceo ad sinistram, donec redeatur ad parallelismum superficierum planarum, spectro desinente in imaginem albam, & sitam in ipso naturali loco. Verum adducto adhuc magis latere mobili ad immotum, incipit efformari angulus planarum superficierum ex opposita parte instrumenti dextera, ac abit imago solis ad partem itidem dexteram parietis colorata in marginibus, sed ordine contrario ita, ut rubeus color remaneat sinister, violaceus dexter, nimirum ille semper proximus loco naturali, hic semper ab eodem remotissimus: ac eo magis dilatantur ipsi marginales colores, quo magis minuitur circini apertura.

59. Hoc phænomenum præbet spectaculum sane jucundum iis etiam, qui nullam habent geometriæ, vel opticæ notionem, ut semper expertus sum. Ille progressus spectri lentus per parietem, dum mutatur apertura circini lento motu, illa expansio, & contractio colorum, ille transitus per colorem album, ac mutatio ordinis colorum, rubeo abeunte a latere dextero ad sinistrum, ac regressus omnium vicissitudinum cum itu, & reditu, auctâ, vel imminutâ aperturâ circini, mirum in modum commovere solent animos, & oblectare, ac ideam ingerunt satis vividam originis colorum explicatorum per solam separationem circulorum ortam ex inæquali ipsorum celeritate. Res multo melius ita

(*) Color albus evanescit magis, si adhibeatur heliostata, quod imminutis circulis exhibet spectrum multo arctius, coloribus multo melius a se invicem separatis. Newtonus multo adhuc majorem separationem induxit, vi luminis etiam aucta, imminuendo circellos ope lentis rite adhibitæ: sed ea, quæ hic proposuimus, ad rem præsentem abunde sunt.

ita ingeritur animis, quam per spectrum efformatum a solo angulo constante prismatis simplicis.

60. Prismatis variabilis angulus hoc pacto non potest augeri, nisi usque ad eum numerum graduum, quem continet arcus frusti majoris ex altera parte, minoris ex altera, diminutus nonnihil, quanta nimirum est diameter foraminis, qua magnitudine saltem debent sibi invicem superimponi bina frusta, ut radius transeat per binas eorum superficies planas. Ubi is transit per unicum frustum, angulus refringens terminatus a superficie altera plana, & altera curva est adhuc minor in ipso extremo hujusce frusti margine, præterquam quod ejusmodi prisma exhibet imaginem nimis auctam, & confusam, ut innui superius num. 8, nimirum gradatim evanescentem ad margines.

61. Major dilatatio, & explicatio colorum obtineri potest addendo ad latus frusti minoris aliud prisma simplex, ut (num. 41.) in fig. 5 IKL, vel etiam plura. Et quidem ad habendam ingentem separationem nihil est opus hoc instrumento: satis est radium transmittere trans prisma simplex majoris anguli, vel plura conjuncta angulorum minorum, quæ simul efficiant angulum majorem, sive ea sint ex eadem substantia, sive e diversis. Cavendum tamen, si angulus sit nimis magnus, non posse per ipsum traduci radium, qui nimirum, si nimis oblique incidat in secundam superficiem, reflectitur in totum. Adhuc tamen potest augeri refractio, & separatio colorum, quantum libet, adhibendo plura prismata angulorum minorum eo, qui transitum impedit, sed separata a se invicem, & inclinata ita, ut radio egresso e prismate præcedenti objiciatur sequens cum ea inclinatione, quæ permittat transitum per ipsum. Sic nimirum obtinebitur incrementum refractionis, & distractionis ipsi respondentis respondens toti vi ipsius prismatis posterioris. Ejusmodi collocatio plurium prismatum in gyrum aliorum post alia, mirum quantum effectum pariet in ordine ad separationem colorum: sed id jam non pertinet ad hoc novum instrumentum.

62. Augetur separatio colorum etiam ope hujus instrumenti, vel ope unius prismatis simplicis, si adhibeatur substantia habens

vim distractivam majorem, ut flint, vel strass: & quidem ex hujusmodi substantia potest fieri ipsum prisma variabile juxta num. 22; quod quidem est magis idoneum ad plures usus, ut ad habendam hanc majorem separationem: habeo, ut superius innui, ejusmodi prismata composita tam e vitro communi, quam e flint Anglicano, & ex alio Veneto, quod habet vim & refractivam, & distractivam adhuc majorem. Ea itidem varietas est utilis ad plures usus.

§. IX.

Usus secundus: determinatio vis refractivæ prismatis variabilis pro radiis mediæ refrangibilitatis, & confirmatio præcipuæ regulæ dioptricæ.

63. Vidimus §. 1, quid sit vis refractiva substantiæ cujuspiam, quam determinat valor *m* exprimens rationem sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti in ingressu ex aere in eam substantiam, sive sinus anguli refracti ad sinum anguli incidentiæ in egressu ex eadem substantia in aerem. Diximus præterea, eo valore semel invento pro substantia prismatis variabilis hujus instrumenti, multo facilius inveniri posse ejus ope vim refractivam cujusvis alterius substantiæ, cujus habeatur exiguum prisma. Docebimus hic, quomodo inveniri possit valor *m* pertinens ad ipsum variabile, & quidem methodus, quam proponemus, pertinebit ad usum prismatis cujuscumque habentis etiam angulum determinatum quemvis, sine ulla variatione. Porro valor *m* est alius pro alio colorum genere: ad usus communes eorum telescopiorum acromaticorum, quæ adhibent binas tantum substantias, occurret nobis in hoc Opusculo adhibendus tantummodo valor *m* respondens radiis mediis. Eum hic pro substantia prismatis variabilis inveniemus, inveniendo valores *m* pertinentes ad extrema duo genera, primi rubei, & postremi violacei, & assumendo medium. In sequenti paragrapho addemus methodum, qua possit inveniri valor *m* pertinens ad quemvis colorem intermedium,

dium, atque id ita, ut retineatur idem omnino color quicumque ex intermediis, ubi quæritur ejus valor *m* respondens diversis prismatis ex diversis substantiis adhibendo alia post alia. Id quidem maxime usui esse potest ad determinandas curvaturas pro tribus substantiis exhibentibus unionem colorum multo majorem, & telescopia multo perfectiora; qua de re fuse egimus in secunda e veteribus illis dissertationibus: id autem primo aspectu videtur admodum difficile ob insensibilem differentiam inter colores proximos, qui ductu quodam continuo mutantur, & desinunt alii in alios.

64. Ea perquisitio licet fieri possit sine prismate variabili, adhuc tamen instituta semel pro ipso, potest ejus ope extendi ad alias omnes substantias, ut patebit in sequentibus paragraphis. Porro id ipsum præstatur ope hujus instrumenti, & valores *m* pertinentes ad substantiam prismatis variabilis ipsius possunt ejus ope inveniri multo accuratiores; quia possunt adhiberi plures anguli, quot libuerit, alii post alios, quærendo angulos incidentiæ, & refractos ipsis respondentes, & dividendo sinum unius per sinum alterius. Quotus, qui debet esse valor *m* quæsitus, debebit obvenire semper idem juxta regulam illam præcipuam dioptricæ, quod sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti habeat semper rationem eandem in eodem colorum genere, & in eadem substantia, quæcumque fuerit inclinatio incidentiæ. Adhibendo plures angulos, & inveniendo semper eundem valorem *m*, confirmabitur ea ipsa regula dioptricæ, quæ innititur etiam theoriæ, & principiis mechanicis. Occurrent utique exigua discrimina orta ex iis errorculis observationum, quos humani sensus evitare non possunt; neque enim in mathesi mixta illud agitur unquam, ut non erremus, sed ut committamus errores, quam possumus, minimos. Medius valor inter omnes inventos ope diversorum angulorum reddet multo minus erroneum valorem quæsitum, quam si quæreretur per unicum prisma anguli constantis.

65. Hæc determinatio erit multo operosior, quam determinatio qualitatis refractivæ aliarum substantiarum præstanda ope ipsius substantiæ prismatis variabilis: requiret mensuras nonnullas exactas ad scalam aliquam particularum æqualium, sed is la-

bor semel institutus nunquam est repetendus; adeoque pertinet ad instrumentum ipsum, ut ejus prima constructio, & verificatio divisionum ipsius. Posset ejusmodi instrumentorum artifex determinare vel per se ipsum, vel adhibendo peritum amatorem physicæ experimentalis, qualitatem refractivam vitri, cujus habeat copiam satis magnam: tum factis ex eadem materia plurimis ejusmodi instrumentis adscribere ipsis numeros valoris *m* medii jam inventos, quod liberaret ab hac omni perquisitione eos, qui ipsa instrumenta coemerent adhibenda: quamquam semper esset multo certior de eo valore is, qui ipsum methodo hic exponenda determinaret per se ipsum pro suo instrumento.

66. En methodum omnium expeditissimam ad habendum valorem *m*, quam maxime licet, accuratum, pro radiis extremis. Ipsam prius tantummodo proponemus paucis indicando theoremata, a quibus pendet: tum singula, quæ fuerint proposita, & indicata, evolvemus, & demonstrabimus. Ad rem facilius, & accuratius peragendam adhibeatur heliostata. Incipiendum erit a determinatione accurata aperturæ parallelismi, cujus differentia ab apertura quacunque in observationibus adhibita exhibebit (num. 34) angulum prismatis variabilis pertinentem ad singulas observationes; ea semel determinata inserviet pro omnibus sequentibus observationibus. Pro earum singulis ita disponenda erunt omnia, ut is radius, de quo agitur, incidat ad perpendiculum in rectam ad sensum horizontalem ductam in pariete, vel in regula ipsi affixa juxta num. 53, & determinetur punctum ejus rectæ, in quod incidit id perpendiculum: deinde eidem radio ita objiciatur prisma, ut prima ejus superficies sit itidem perpendicularis radio eidem: demum notetur in pariete punctum, in quod abit idem radius refractus. Observatione ita instituta, radius perpendiculariter exceptus a prima superficie transibit per ipsam irrefractus, ac habebit unicam refractionem in egressu e secunda superficie ipsius prismatis. Quantitas refractionis determinabitur determinando distantiam a pariete puncti, in quo ipse radius egreditur, & distantiam puncti parietis, in quod is incidebat ante interpositionem prismatis, a puncto, in quod incidit jam ab ipso refractus.

Hæc

Hæc secunda distantia divisa per illam primam exhibebit, ut jam videbimus, tangentem refractionis: angulus incidentiæ in eo casu erit æqualis angulo prismatis, cui si addatur refractio inventa, habebitur angulus refractus: sinus hujus divisus per sinum anguli incidentiæ exhibebit valorem m quæsitum.

67. Evolvenda sunt singula, quæ proposuimus, ostendendo, quo pacto possint facile, & accurate fieri omnia, quæ sunt præscripta, & demonstrando, quæ sunt hic proposita. Incipiemus autem a determinatione aperturæ parallelismi, de qua egimus num. 34. Applicato instrumento figuræ 11 ad foramen fenestræ dirigatur ope speculi, ut in §. præcedente, radius solis ad parietem oppositum in altitudine a pavimento proxime æquali altitudini foraminuli machinulæ ejusdem, interponatur heliostata cum mensa figuræ 14 (Tab. III), & tabula instructa cochleis, tabulæ horizontali ipsius heliostatæ, ac transmissa parte radii per ejus foraminulum ducantur in pariete binæ lineæ tenues tangentes imaginis rotundæ in binis marginibus directione ad sensum verticali: poterit applicari ad eam rem charta habens binas lineas rectas verticales a se invicem distantes per diametrum imaginis, quæ haberi solet a radio transmisso per foramen heliostatæ positi in mediocri distantia a pariete: imponatur instrumentum figuræ 9 illi tabulæ instructæ cochleis ita, ut facies plana frusti minoris excipiat radium transmissum positione ad sensum perpendiculari, quam indicabit pars radii reflexa ab eadem prima superficie ad foramen ipsum: aperiatur autem, & claudatur instrumentum ipsum, donec imago illa in pariete redeat ad positionem priorem tangendo easdem illas binas rectas verticales binis marginibus, vel distando ab ipsis æque ac prius. Ea erit apertura parallelismi diligenter notanda, & conservanda pro omnibus sequentibus observationibus. Potest idem fieri sine heliostata adhibendo radium integrum, ut in §. superiore: sed tunc oportet cito apponere instrumentum, & adducere imaginem ad verticales præcedentes, ob motum solis, ac pluribus vicibus erit removendum instrumentum ad latus, & reducendum, donec constet, radium transmissum abire eodem, quo abit directus.

68. De-

68. Determinata apertura parallelismi determinandum erit, uti promissum est num. 53, punctum rectæ horizontalis ductæ in pariete, in quod cadit perpendiculum ductum e centro foraminis figuræ 11. Sit (fig. 18 Tab. IV) OO' ejusmodi recta, BB' superficies operculi figuræ 11, I centrum ejus foraminis, AA' ejus diameter horizontalis. Si fidendum esset æquali tensioni fili cujuspiam, ejus caput alterum applicandum esset ad ipsum punctum I, caput autem alterum adducendum ad bina puncta rectæ OO', quæ sint *e*, *e'* adhibendo pro utroque tensionem eandem. Diviso bifariam intervallo *ee'*, in *i*, id esset punctum quæsitum: Si enim concipiantur rectæ I*e*, I*e'*; triangulum *eIe'* erit isosceles, in quo recta I*i* ducta ad mediam basim erit ipsi perpendicularis.

69. Ad evitandum errorem, quem posset parere inæqualis tensio fili, esset magis idonea ad eum usum pertica longior habens in binis extremis binas cuspides; sed ubi conclave sit aliquanto amplius, pertica adeo longa & paratur, & tractatur difficilius. Erit magis idoneum instrumentum figuræ *16* (Tab. III): applicato ejus latere EE' ad lineam OO' figuræ 18 (Tab. IV) tendatur illud filum digressum a puncto I hujus usque ad punctum F' ipsius fig. *16* (Tab. III), & promoveatur ipsum ejus latus EE' ad dexteram, ac ad lævam, donec deveniatur ad positionem, in qua id filum transeat accurate per punctum F ejusdem instrumenti figuræ *16*. In ea positione punctum ipsius G' determinabit in linea OO' figuræ 18 (Tab. IV) punctum quæsitum *i*. Id patet ex ipsa constructione ejusdem figuræ *16* (num. 52), ex qua recta FF' est perpendicularis rectæ EE'; adeoque filum ipsi congruens erit perpendiculare rectæ OO' figuræ 18, cui ipsa recta erat applicata tum, cum id filum transibat per FF' figuræ *16*.

70. Invento in fig. 18 puncto *i*, notari debent hinc, & inde ab ipso bina puncta *a*, *a'* ejusdem lineæ OO' ad intervallum ab *i* æquale semidiametro AI foraminis, quæ respondebunt ad perpendiculum punctis A, A'. A puncto *i* ita invento incipient divisiones ejus rectæ, de quibus egimus num. 53. Sint autem puncta B, B', A, A', I, O, O', *a*, *a'*, *i* in fig. 19 eadem, ac in 18, & litte-

litteræ B', A', O', a' notatæ accentibus sint in utraque figura ex parte sinistra respectu aspicientis fenestram.

71. His semel ita paratis dirigatur radius Solis ope instrumenti figuræ 11 (Tab. II) ad parietem ita, ut imago solis ad sensum circularis involvat spatium aia' (fig. 18 Tab. IV): ea imago evadit ibi ita magna, ut sit multo amplior eo spatio, quod est æquale foraminulo AA' exiguo, & remoto a pariete. Efformatur ipsa a radiis solis reflexis a speculo, & transeuntibus per foramen AA'. Extrema puncta cujusvis diametri ejus imaginis determinantur a radiis digressis e binis punctis extremis cujuspiam diametri disci solaris: eorum radiorum directiones productæ retro per AS, A'S' se intersecarent in quodam puncto E ad angulum SES' æqualem diametro apparenti solis, quæ superat nonnihil dimidium gradum, adeoque ipsa excepta plano quovis DD' ad sensum perpendiculari directioni radiorum ipsorum debet habere diametrum CC' æqualem circiter parti $\frac{1}{110}$ distantiæ puncti E ab eo plano, punctum autem E distabit ab I circiter per 111 diametros AA', quæ duo facile demonstrantur. Hinc imago in pariete erit satis magna, & in alio quovis plano anteriore minor quidem, quam ibi, sed adhuc multo major diametro foraminis AA'.

72. Interponatur jam heliostata, cujus tabellam verticalem exprimat DD' habentem secundum foraminulum GG', existente G' ad dexteram, nimirum ex parte O, & D. Imago solaris erit amplior eo foramine: ea habebit suam diametrum horizontalem alicubi in CC' supra, vel infra, vel ad latus ejusdem foraminuli; sed motu totius heliostatæ, vel tabellæ excurrentis, & deferentis secum foraminulum ipsum, facile fiet, ut id remaneat intra imaginem eandem. Tum vero in pariete opposito habebitur imago lucida HH', multo minor ea, quæ habebatur remoto heliostata. Ea efformatur a radiis sAGH, s'A'G'H' pertinentibus ad puncta disci solaris interiora, decussantibus se alicubi in F inter AA', & GG', quod punctum secat bifariam distantiam AG, si foramina AA', GG' habent diametros æquales: secus eam dividit in ratione ipsarum diametrorum. Patet autem, obtineri diametrum HH', si fiat, ut FG ad FH ita GG' ad HH', saltem secluso exi-

exiguo errore, qui provenit ab inflexione radiorum transeuntium prope margines A, G, A', G'. Ii radii deflexione inæquali ita disperguntur, ut respectu imaginis vividioris efformatæ a radiis directe transeuntibus sensum effugiant, potissimum si conclave non sit penitus obscurum, & paries non sit nimis vicinus heliostatæ, & fenestræ. Cum intervallum a margine foraminis, ad quod ita radii inflectuntur, ut nullus transeat directe, sit perquam exiguum; nos hic considerabimus radios extremos ejus imaginis sH, $s'H'$ tanquam transeuntes per ipsa puncta foraminum marginalia A, G, A', G', neglecto eo exiguo intervallo.

73. Movendo heliostatam, vel ejus tabellam facile eo adducetur imago HH', ut extremum ejus diametri horizontalis H, quod est sinistrum respectu aspicientis fenestram, congruat cum dextero a punctorum aa', ut in fig. 18, vel vice versa dexterum H' cum eorum sinistro a', ut in fig. 19. Interponatur prisma, cujus angulus LKM sit ex parte sinistra, ex qua jacent puncta A', D', O', a', sed ita, ut prima facies KL sit perpendicularis radio AGa in fig. 18, A'G'a' in fig. 19. Eam positionem indicabit radii ejusdem pars reflexa ad G in fig. 18, & ad G' in fig. 19. Nam a prima etiam vitri superficie semper reflectitur pars luminis, & in ipsa tabula DD' efformat versus prisma imaginem VV' aliquanto majorem foramine GG' ob divergentiam radiorum FGN, FG'N', exiguam quidem, sed tamen aliquam: si ea imago reflexa abeat supra, vel infra foraminulum GG'; facile reducetur ad altitudinem ipsius, elevando in primo casu ope cochlearum latus FG tabulæ figuræ 14 (Tab. III), vel deprimendo latus IH; & in secundo casu e contrario deprimendo illud, & elevando hoc. Tum movendo motu laterali prisma ipsum impositum ei tabulæ, si sit simplex, vel instrumentum figuræ 9 (Tab. II), si agatur de ejus prismate variabili, reducetur imago ipsa eo, ut in fig. 18 (Tab. IV) abeat V in G, in fig. 19 V' in G'.

74. Radius VN in fig. 18, V'N' in fig. 19 transiens per primam superficiem ad perpendiculum abibit irrefractus usque ad secundam, ad quam appellet ille in P, hic in P'; dum alter

ibi

ibi G'N', hic GN habebit in primo ingressu refractionem perquam exiguam ob exiguam inclinationem, & deveniet ad secundam superficiem ille in P', hic in P. Ibi refringentur ambo ad partem oppositam cuspidi K; cum debeant recedere a perpendiculis PR, P'R'; ac abibunt per rectas PT, P'T' usque ad parietem, ubi exhibebunt in TT' spectrum coloratum longius imagine directa HH' ob refractionem radii violacei majorem refractione rubei; eritque PT primus rubeus, P'T' postremus violaceus.

75. Si producatur in fig. 18 RP, in fig. 19 R'P' usque ad KL in Q, Q'; erit QPN in fig. 18 angulus incidentiæ, HPT refractio, RPT angulus refractus, qui erit æqualis summæ binorum præcedentium ob RPH æqualem QPN ad verticem opposito. Ipse autem angulus incidentiæ QPN erit æqualis angulo prismatis K; cum in triangulis rectangulis QNP, QPK angulus ad Q sit communis, adeoque angulus prioris ad P æqualis angulo posterioris ad K. Quare is angulus habebitur, habito angulo prismatis, qui haberi potest pluribus methodis, sed habetur ope hujus instrumenti, si sit prisma simplex constans, ponendo ipsum inter ejus lamellas centrales juxta num. 43, & si sit compositum variabile, inveniendo parallelismum juxta num. 67, & assumendo differentiam parallelismi a præsenti positione. Refractio autem HPT habebitur per mensuram accuratam distantiæ PH, & intervalli HT, quod divisum per illam exhibet tangentem ejus anguli ad radium $= 1$, ob angulum PHT rectum. Eadem autem est demonstratio pro figura 19 iisdem omnino verbis, dummodo litteris R, P, Q, H, T addatur accentus (*).

76. Intervallum HT facile habebitur notato puncto T, potis-

(*) Si juxta adnotationem ad num. 53 linea horizontalis habuerit intervalla divisionum æqualia partibus quinquagesimis regulæ applicandæ ad habendam distantiam HP methodo exponenda hic num. 77, ac habeatur ope transversalium scala dividens unam ex iis partibus in particulas 100, habebitur intervallum HT, duplicando ejus numerum, in partibus decimis millesimis ejus intervalli: ea erit tangens anguli quæsiti ad radium $= 10000$, qui angulus idcirco invenietur immediate in tabulis sine ullo calculo.

simum si jam habeatur divisio rectæ OO' incipiens ab *i*. Numerando partes integras, & assumendo residuum postremæ partis in eadem scala, quæ exhibet subdivisiones earum partium, habebitur *i*T in fig. 18, *i*T' in fig. 19: ipsi demetur *ia* in priore, addetur *ia'* in posteriore, quæ lineolæ sunt æquales semidiametris IA, IA' foraminis AA', ac obtinebitur ibi *a*T, hic *a'*T'.

77. Pro distantia HP adhibebitur (num. 52) regula fig. 17 (Tab. III) habens cuspidem C, & longitudinem AC accurate cognitam: satis erit, si sit cognita in partibus ejusdem scalæ, in quibus assumitur intervallum in linea OO' (fig. 18, & 19 Tab. IV). Applicato extremo ejus margine A ad *a*, vel *a'*, facile prisma moveri potest antrorsum, retrorsum motu parallelo ita, ut punctum V, vel V' congruat cum G, vel G', & punctum P, vel P', e quo prodit is radius extremus, in quem inquiritur, tangat cuspidem ejusdem regulæ.

78. Habitis jam HT, & PH, habetur tangens refractionis HPT dividendo posteriorem per priorem: & inventa ipsa, ac addita angulo prismatis K juxta num. 75, obtinetur angulus refractus: cujus sinus divisus per sinum anguli prismatis, qui æquatur angulo incidentiæ, exhibet valorem quæsitum *m* pro primis rubeis, & eodem pacto positis accentibus ad P', T' invenitur idem pro violaceis.

79. En formulas pro iis valoribus.

Angulus prismatis . . . . a
Distantia PH prismatis a pariete . . . . p
Intervallum HT a radio directo perpendiculari ad refractum . . . . q
Refractio . . . . r

Erit . . . . $\tan . \, r = \frac{q}{p}$ . . . . $m = \frac{\sin . (a + r)}{\sin . a}$.

80. Hac methodo obtinebitur satis accurate valor *m* pertinens ad primum rubeum; quia in spectro colorato initium rubei satis accurate determinari potest: at series violaceorum ita sensim languescit, & per gradus insensibiles tendit ad evanescentiam, ut postremus ejus terminus nonnisi crassiore quadam æstimatione defini-

definiri possit. Si uterque limes accurate definiri posset; haberetur accurate etiam valor *dm*, qui est differentia binorum *m*. Sed satis est hac methodo determinare valorem *m* pro radiis quibusdam mediis, assumendo medium arithmeticum inter binos inventos, videlicet eorum semisummam. Error commissus ob eam incertam æstimationem extremi violacei, qui esset satis magnus respectu differentiæ *dm*, erit ita exiguus respectu ejus semisummæ, ut tuto negligi possit, ut diximus num. 10. Hinc utemur valore medio *m* hic invento in usu hujus instrumenti ad comparandas inter se vitrorum adhibendorum vires: valorum *dm*, quorum valor absolutus non occurret in formulis proponendis, ratio ad se invicem, quæ sola obveniet, invenietur suo loco, ope hujus instrumenti alia via sine ulla necessitate valoris absoluti. Adhuc tamen ii valores absoluti inveniri poterunt satis accurati non solum pro coloribus extremis, sed etiam pro quovis numero intermediorum, methodo multo operosiore, quam promisimus num. 63, & sequenti paragrapho evolvemus.

§. X.

Idem usus pro quovis numero colorum intermediorum cum applicatione ad qualitates distractivas.

81. TRADEMUS in hoc paragrapho methodum determinandi valores *m* pro quovis numero colorum intermediorum ita accuratos, ut etiam valores *dm*, qui sint eorum differentiæ, obveniant satis accurati, ac indicabimus eximium ejus determinationis usum. Observatio instituenda erit sequenti ratione, quæ præbebit etiam easdem prorsus individuas colorum species, ubi plures anguli prismatis variabilis adhibendi erunt pro eodem colore, vel plurium vitrorum vires tam refractivæ pro singulis coloribus, quam distractivæ pro diversis comparandæ erunt inter se. Ea perquisitio est delicatissima, & est necessaria, ut jam innuimus, non pro telescopiis adhibentibus objectivum compositum e binis substantiis, quæ tantummodo conjungant bina colorum ge-

 nera;

nera ; sed ubi adhibendæ sint ternæ, quæ conjungant terna, ut binos colores extremos cum quopiam ex intermediis. Verum eadem perquisitio pertinet etiam ad eum usum hujus instrumenti, quem persecuti sumus superiore paragrapho, quia ope methodi, quam proponemus, facile per ipsius usum comprobari potest experimentis regula constantis rationis sinuum etiam pro quovis ex coloribus ipsis intermediis.

82. Ad ejusmodi perquisitionem requiritur duplex heliostata, aliud prisma majoris anguli, & major distantia fenestræ, ad quam applicatur instrumentum figuræ 11 (Tab. II), a pariete, in quo demum excipitur radius. In fig. 20 (Tab. IV) sint puncta B, B', A, A', F, D, D', C, C', G, G' eadem ac in fig. 18, existente DD' primo heliostata, CC' imagine ampliore solis excepta in ejus tabula verticali, GG' foramine ipsius exiguo, per quod transeat radius tenuis, & appellat in NN' ad prisma MKL, habens angulum K majorem : debet autem is angulus collocari positione contraria ei, quam habebat angulus K figuræ 18. Id prisma debet affigi inferne cylindro solido verticali *b* immisso in cylindrum cavum excavatum in tabella imponenda mensæ horizontali ejusdem primi heliostatæ : ita is cylindrus solidus poterit converti circa proprium axem, & secum circumducere ipsum prisma : eidem autem cylindro debet esse affixa regula *be*, cujus ope notari possit in tabella habente cylindrum cavum positio prismatis ipsius adhibita in observatione ita, ut post mutationem factam revolutione ipsius regulæ, & cylindri, ac prismatis, possint restitui omnia ad positionem priorem, reducta regula ad notam factam. Si ipsi tabellæ adnectatur charta ; facile poterit in ea duci linea adjacens lateri regulæ, adjuncto ipsi numero exprimente ordinem observationum institutarum cum diversis positionibus : ad eam lineam reducetur facile ipsa regula semel inde dimota.

83. Extrema ejus radioli fila traducta trans prisma per lineas quasdam NP, N'P' procederent usque ad parietem ad exhibendum ibi spectrum coloratum tenue, & oblongum, ut in fig. 18 in TT' ; sed is radiolus exceptus tabella verticali *dd'* secundi helioSta-

liostatæ exhibebit in ipsa spectrum *tt'*, in quo ob positionem primi prismatis contrariam erit *t'* primum filum rubeum, *t* postremum violaceum. Per foraminulum *gg'* secundi heliostatæ non transibit nisi radiolus unius coloris cujusdam: ejus extrema fila producta usque ad parietem per *g*H, *g'*H' habebunt discrimen aliquod admodum exiguum; sed tamen semper habebunt aliquod: verum seligetur ad determinationem valoris *m* alterum ex ipsis, ut *gn*, quod, reductâ regulâ *be* ad positionem eandem, erit semper ejusdem speciei determinatæ.

84. Apponatur jam in *mkl* secundum prisma, nimirum id, in cujus qualitatem refractivam inquiritur, ita, ut latus *kl* sit perpendiculare filo *g*H, quod indicabit pars ipsius reflexa in *uu'*, ubi punctum extremum *u* ejus imaginis reflexæ abibit in *g*: progressus eorum filorum habebitur hic, ut in fig. 18, & 19, per *np*T, *n'p'*T': refractio erit H*p*T, angulus incidentiæ *npq* æqualis angulo prismatis *k*, angulus refractus *rp*T æqualis summæ refractionis, & anguli incidentiæ ipsius. Illud unicum habebitur discrimen, quod filum *p*H non erit perpendiculare parieti, adeoque ad habendam refractionem H*p*T, oportebit notare in recta OO' bina puncta H, T, & determinare punctum X, in quod cadit perpendiculum demissum ex *p* in eandem rectam, ac ejus perpendiculi magnitudinem: tum enim in binis triangulis rectangulis *p*XH, *p*XT determinabuntur bini anguli H*p*X, T*p*X, quorum tangentes sunt $\frac{XH}{Xp}$, & $\frac{XT}{Xp}$.

85. Porro punctum X, & longitudo *p*X facile determinabuntur ope instrumenti fig. 16 (Tab. III) cum regula fig. 17. Applicato enim ad parietem capite A posterioris ita positæ, ut habeat ad sensum positionem perpendicularem parieti, & adducto prismate secundo ad eam positionem, in qua puncto *u* congruente cum *g*, punctum *p* tangat cuspidem C ejusdem regulæ, habebitur distantia a pariete æqualis intervallo dato AC regulæ ipsius, quam distantiam nihil ad sensum turbabit, si qua adsit admodum exigua ejusdem regulæ inclinatio. Tum applicato ad lineam OO' fig. 20 latere EE' fig. 16, & translato antrorsum, retror-

sum,

sum, devenietur ad positionem, in qua latus AB regulæ figuræ 17 transeat simul per bina ejus puncta FF', tangendo simul puncto suo C punctum prismatis p figuræ 20 (Tab. IV), ex quo prodit filum pT ejus radioli. Eo pacto habebitur, quidquid requiritur ad determinandos binos angulos HpX, TpX, quorum summa, vel differentia exhibebit refractionem $HpT=r$, prout punctum X ceciderit intra rectam HT, vel extra: cadet autem extra, quotiescumque refractio secundi prismatis fuerit minor refractione primi. Si habeatur itidem angulus prismatis $=a$, habebitur (num. 79) valor $m=\frac{sin.\ (a+r)}{sin.\ a}$ debitus illi speciei determinatæ ejus coloris.

86. Si ad eam observationem adhibeatur prisma variabile; poterunt assumi plures ejus anguli, & invento semper eodem ad sensum valore m, confirmabitur regula rationis constantis sinuum applicata cuivis colori intermedio, qui fuerit transmissus per secundum foramen. Poterunt autem assumi alii post alios colores quicumque: nam facta conversione primi prismatis MKL ope regulæ *bc*, spectrum *tt'* in tabula *dd'* secundi heliostatæ mutabit positionem ita, ut adveniat ad foramen *gg'* jam alterum extremum *t*, jam alterum *t'*, quo pacto remoto secundo prismate *lkm* advenient ad HH' colores omnes alii post alios, qui erunt satis simplices; nam spectrum *tt'* oblongum, & exiguæ crassitudinis habebit colores parum admodum permixtos. Tum vero constabit & illud, diversam refrangibilitatem, & diversum colorem ita pertinere ad radios ipsos, ut nova refractione color, & refrangibilitatis gradus nequaquam mutentur. Nam in TT' apparebit semper idem color, ac in HH'.

87. Refrangibilitatis gradus non pendet a sola natura radii simplicis colorati, sed partim ab ipsa, partim a substantia refringente, quod exhibebunt hæc ipsa experimenta; nam si adhibeantur prismata e diversis substantiis pro quovis colore eodem; invenietur m diversum: & diversus erit valor m, si adhibeantur diversi colores cum eadem substantia. Id quidem noverat etiam Newtonus: sed ipse censuit differentiam valorum m pertinentium

ad

ad duos colores quoscumque habere ad valorem $m-1$ eandem rationem in omnibus substantiis : atque eam rationem definivit numeris exhibitis : pro extremis violaceis, & rubeis posuit 1 ad 27, ita ut $m-1$ rubeorum ad $m-1$ violaceorum habeat in omnibus substantiis rationem 27 ad 28. Deinde redactis coloribus, quorum innumeræ habentur species, ad 7 classes *rubeum*, *aureum*, *flavum*, *viridem*, *cæruleum*, *indicum*, *violaceum*, exhibuit pro confinio inter eas species numeros habentes relationem quandam ad divisionem monochordi pro sonis exhibentibus tonos octavæ.

88. Differentiam extremorum non semper esse ad $m-1$, ut 1 ad 27, id quidem invenit Dollondus; & id invenitur etiam per solas observationes factas methodo exposita usque ad num. 80 sine secundo heliostata. In vitro flint est major, & adhuc major in strass. Posset quidem ea ratio in diversis substantiis esse diversa; sed ita, ut saltem valores *dm* pertinentes ad diversa colorum binaria haberent inter se rationem semper eandem, nimirum illam, quam exhibet divisio monochordi adhibita a Newtono; sed id ipsum haud ita se habere ego demonstravi in secunda ex illis meis dissertationibus veteribus, ope observationum analogarum iis, de quibus agemus etiam hìc inferius.

89. Si liceret satis distincte determinare limitem inter binos contiguos ex illis septem coloribus; posset methodo hìc proposita determinari accurate ratio valorum *dm* pertinentium ad singula binaria, sive ratio valorum $m-1$ pertinentium ad eos limites : non solum $m-1$ primorum rubeorum ad $m-1$ postremorum violaceorum inveniretur diversa in diversis substantiis; sed harum differentia, quæ est *dm* extremorum, ad differentiam valoris pertinentis ad limites intermedios a valore pertinente ad primum rubeum inveniretur diversa ab ea, quam requirit illa relatio ad divisionem monochordi, quod directe destrueret ejusmodi analogiam colorum cum sono. Verum is limes satis accurate determinari non potest idcirco, quod ab uno colore ad alium sequentem transitur per gradus ita insensibiles, ut limes pen-

pendeat ab æstimatione admodum crassa, adeoque ubi observatio instituta est ope unius substantiæ refringentis, dum adhibetur altera, potest quidem satis accurate adhiberi idem primus rubeus, & saltem proxime, si minus accurate, postremus violaceus; sed in illa incerta æstimatione reliquorum limitum semper erit dubium, an species adhibita sit ea ipsa, quam Newtonus assumpsit tanquam limitem inter colorum species diversas. Et quidem satis patet ex ipsa Newtoni Optica, ipsum etiam hæsisse in definiendis iis limitibus, quos nonnisi crassiore æstimatione determinavit in divisione spectri, ex qua ejusmodi analogiam deduxit.

90. Adhuc tamen ope methodi propositæ potest ita inquiri in eam analogiam cum sono, ut sine ulla dubitandi occasione demonstretur ejus falsitas. Assumantur tres colores, bini proximi punctis extremis *r*, *r'*, & unus ex intermediis, quod facile fiet conversione illa primi prismatis, cujus ope adducentur ad foramen *gg'* ii tres colores; ac pro singulis notetur positio regulæ *bc* ducta linea secundum latus ipsius: habebuntur tres valores *m* respondentes illis tribus coloribus in prima illa substantia: poterunt autem haberi iidem etiam pro secunda substantia, tum habebuntur bini valores *dm* respondentes tam in prima, quam in secunda duobus binariis colorum, nimirum respondentes singulis extremorum combinatis cum eo intermedio: id fiet subtrahendo *m* rubei ab *m* intermedii, & *m* hujus ab *m* violacei. Dividendo primum *dm* per secundum tam in prima, quam in secunda substantia; si quotientes earum divisionum obveniant diversi; demonstrabitur directe falsitas ejus analogiæ a Newtono propositæ. Debent autem obvenire diversi in omnibus substantiis diversis, quas inter se huc usque comparavi non hac methodo, sed alia exposita in eadem secunda dissertatione veteri. Ibi ea falsitas eruitur etiam ex alio observationum genere, sed tantummodo indirecte, ac ambitu longiore, & demonstratione multo magis complicata.

91. Sed quoniam hoc discrimen non est satis magnum; cavendum, ut observatio instituatur accuratissime; ne ipsi rei tribuatur

tur differentia proveniens a solo errore observationis. Potest autem observatio institui duplici modo: primo quidem immoto prismate primo MKL, potest pro eodem colore adhiberi prisma secundum *k* ex diversis substantiis aliud post aliud: tum punctum H remanet idem pro substantiis omnibus; nam motus solis, & speculi machinulæ BB' nihil turbat directionem radii AGNP, & A'G'N'P', adeoque remanent eadem puncta *tt'*, & totum spectrum, ac idem radius coloratus *gn*H. Curandum erit in singulis casibus: 1°. ut latus *kl* habeat satis accurate directionem perpendicularem radio *gn*, puncto *u* radii reflexi congruente accurate cum *g*: 2°. ut cuspis regulæ accurate abeat in punctum *p* ad habendam accurate longitudinem *p*X: 3°. ut ea regula accurate transeat per puncta F, F' figuræ 16 ad habendum accurate punctum perpendiculi X: 4°. ut accurate determinetur in singulis observationibus punctum T. Error in singulis ex hisce 4 observationibus producit errorem in refractione H*p*T$=r$: Error exiguus in determinatione puncti H communis pro substantiis omnibus in eodem colore, & error exiguus in determinatione anguli prismatis cujusvis substantiæ communis omnibus coloribus in eadem substantia, turbabunt multo minus differentias valorum r, adeoque & valorum $m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}$.

92. In iis quatuor conditionibus observatis exiguus error primæ, nimirum exigua aberratio positionis lateris *kl*, non mutabit ad sensum valorem quæsitum r, & m, quod patebit experienti: nam facta exigua mutatione ejus directionis cum sensibili recessu puncti *u* a puncto *g*, non deprehendetur sensibilis mutatio puncti T: error secundæ, & tertiæ, nimirum longitudinis *p*X, & positionis puncti X, corrigetur quidem ex parte; cum eorum usus occurrat tam in valore anguli X*p*H, quam X*p*T, ubi eorum differentia exhibet valorem r: sed si is sit sensibilis; relinquetur ejus pars sensibilis etiam in valore differentiæ eorum angulorum: quare multo major diligentia adhibenda erit in iis conditionibus observandis. Maxima autem accuratio erit necessaria in determi-

 nando

nando puncto T, cujus error totus retinetur in deducenda demum refractione $HpT=r$.

93. Verum periculum erroris minuetur; si observatio instituatur hoc alio pacto. Seligantur tres positiones primi prismatis, quarum prima adducat prope foramen gg' punctum t, secunda punctum aliquod intermedium inter t, t', tertia punctum t'; & in singulis notetur diligenter punctum H: in singulis autem præter lineam adjacentem regulæ be poterit notari etiam initium coloris rubei in t', quod accuratiorem reddet in observationibus posterioribus restitutionem primi prismatis, & spectri tt' ad locum præcedentem. Motus puncti H erit perquam exiguus, potissimum si prisma primum fuerit satis proximum foramini GG', id foramen exiguum, & axis cylindri proximus lateri KM, prope punctum K, & circa medium spatioli PP', e quo radius egreditur. Facto pluribus vicibus motu illo conversionis primi prismatis reducti semper ad illas easdem tres positiones ope signi regulæ, & puncti t', facile apparebit, an semper accurate iidem tres radii redeant ad eadem puncta H, quæ notanda sunt lineolâ admodum tenui. Tum apponetur secundum prisma ex prima substantia, & adducetur ejus punctum p ad cuspidem C figuræ 17 (Tab. III), notato in fig. 20 (Tab. IV) puncto X, ope instrumenti figuræ 16 (Tab. III); & quidem optimum erit in ipsa figura 16 habere in F, & F' duas pinnulas extantes in directione FF', quibus applicato latere AB ejusdem fig. 17, id necessario transeat per ejus puncta FF'.

94. His ita præparatis adducetur primum prisma ad tres positiones selectas, & notatas, ac notabitur in singulis punctum T (fig. 20 Tab. IV.) ad habendos accurate angulos XpT, XpH, pro singulis coloribus cum valore r, & valore m deducendo ex ipso r, & a: tum collocabitur prisma secundum ex secunda substantia, & poterit facile collocari ita, ut pX remaneat eodem loco, ac adhibitis iisdem positionibus primi prismatis, invenientur tres valores m pertinentes ad eosdem coloratos radios pro ea secunda substantia: eodem pacto si adhibeatur tertia substantia, vel aliæ plures; habebuntur pro singulis tres valores m. Differentiæ extremo-

morum a medio exhibebunt valores *dm*, qui ob immobilitatem prismatis secundi in omnibus tribus observationibus pendebunt tantummodo hinc a differentia perquam exigua rectæ XH, inde a multo majore rectæ XT. Repetita ea observatione pluribus vicibus, poterunt haberi satis accurate illi bini valores *dm*: saltem apparebit a discrimine inter diversarum observationum determinationes, usque ad quem limitem possit haberi fides determinationibus habitis hac methodo.

95. Si seligantur eo pacto non solæ tres determinationes pro tribus coloribus, sed plures, ut septem, assumendo singulos e singulis septem speciebus enumeratis num. 87; haberi etiam poterit immediate curva quædam, cujus usus egregius mihi occurrit in illa secunda e dissertationibus veteribus, pro quadam successiva inversione spectri, de qua agemus etiam hic inferius. Si valor *m* minimus pertinens ad colorem rubeum minime omnium refrangibilem ex iis septem subtrahatur ab omnibus sequentibus tam in prima, quam in secunda aliqua ex iis substantiis; habebuntur valores *dm* pertinentes ad illum primum colorem collatum cum reliquis sex. Si in recta quadam (fig. 21) assumantur abscissæ AB, AC, AD, AE, AF, AG proportionales iis sex valoribus pertinentibus ad primam substantiam, & erigantur ordinatæ BB', CC'..... GG' proportionales valoribus pertinentibus ad secundam; vertices B', C'...... G' erunt ad lineam quandam: ea linea erit recta; si ii valores in secunda substantia sint proportionales respondentibus sibi in prima: secus erit curva. Si vera esset analogia luminis cum sono proposita a Newtono; ea linea in omnibus binariis substantiarum quarumcunque esset semper recta: si ea est curva; patet, illam analogiam non posse esse generalem; quia si in una ex iis substantiis illæ rationes differentiarum essent eædem, ac in divisione monochordi; jam non essent eædem in altera.

96. Porro ibi exposui illum ejus curvæ usum, quem hic innuam. Ope prismatis variabilis ex una substantia combinati cum fixo ex alia, augendo, vel minuendo angulum prioris motu continuo devenitur ad inversionem spectri ita, ut color rubeus abeat

ad eam plagam, in qua prius erat violaceus, & vice versa: ea ipsa de re agemus infra, ubi proponemus usum hujusce instrumenti ad comparandas inter se qualitates distractivas binarum substantiarum: ea inversio ipsius spectri debet fieri momento temporis per unionem omnium colorum simul, quæ unio exhibeat colorem album; si hæc linea determinata a verticibus harum ordinatarum est recta: si autem ea sit curva; inversio erit successiva; quin unquam habeatur unio colorum plurium, quam duorum. Inveni ibi, directionem tangentis ejus curvæ determinatam per angulos binorum prismatum determinare colorem, qui debeat extare solus, & chordas parallelas ipsi tangenti determinare omnia binaria colorum, qui ab iis angulis unientur. Deinde exhibui methodum determinandi curvam ipsam ope colorum extantium, quæ methodus parum differt a methodo interpolationis. Ea determinatione sum usus deinde ad comparandas inter se plures substantias post comparationem singularum cum prismate variabili; qua comparatione opus habebam ad determinandas curvaturas pro objectivo composito e tribus lentibus, quod posset conjungere colores tres.

97. Verum ea methodus vix poterit esse usui, aut ne vix quidem, ob difficultatem summam agnoscendi in secunda observatione illas easdem species individuas colorum, quæ extabant in prima. Methodus hic adhibita exhibet immediate eam curvam: sed ipsa sine ulla necessitate curvæ ejusdem exhibet immediate valorem utriusque *dm* respondentis rubeo comparato cum medio, & cum violaceo, vel medio comparato cum iis extremis, respectu singularum substantiarum; ac inde eruuntur curvaturæ trium lentium ex ipsis elaborandarum, quæ possint conjungere tres colores. Eadem methodus præberet multo magis valores *dm* respondentes binis coloribus extremis respectu singularum substantiarum, quorum valorum bini cum suis valoribus *m* exhiberent elementa pro computandis curvaturis binarum substantiarum componentium objectivum capax uniendi illos binos colores extremos: quanquam ad eam unionem requiritur adhuc minus, nimirum præter binos valores *m* sola ratio eorum binorum *dm*. Verum hæc me-

methodus inveniendi ea elementa est nimis operosa, & determinato semel valore *m* substantiæ prismatis variabilis, quod præstitimus paragrapho 9, habetur alia methodus in immensum minus operosa determinandi ope hujus instrumenti valores *m* binarum substantiarum adhibendarum pro ejusmodi objectivo, & rationem valorum *dm* pertinentium ad ipsas: & quidem hæc secunda determinatio fit ibi multo accuratius, nimirum per valores multo majores, in quibus errorculi commissi in observatione minus turbant valores ipsos, & rationem ab iis determinandam. Eam methodum proponemus §. 12, & 13: interea paragrapho sequenti persequemur animadversiones nonnullas pertinentes ad ea, quæ sunt exposita in binis superioribus.

§. XI.

Animadversiones nonnullæ in ea, quæ habentur in binis paragraphis superioribus.

98. IN superioribus binis paragraphis exhibuimus methodum determinandi valorem *m* ope prismatum, & quidem ita adhibitorum, ut radius, cujus refrangibilitas quæritur, incidat ad perpendiculum in primam faciem prismatis ipsius. Habentur plures aliæ methodi inquirendi in eundem valorem; sed ea, quam ibi proposuimus, videtur nobis omnium maxime idonea, tum quia ejus ope valor ipse potest haberi multo accuratior; tum quia per ipsam obtinetur valor *m* pertinens ad quemlibuerit colorem determinatum primigenium simplicem; unde multo accuratius possunt determinari differentiæ *dm* eorum valorum pertinentes ad quælibuerit colorum binaria, quod est multo utilius ad deprehendendam naturam luminis, & necessarium ad habendam rationem ipsarum differentiarum adhibendam pro determinatione curvaturarum, quas habere debent telescopia acromatica.

99. Multi ad eam rem præferunt lentes. Si innotescat curvatura utriusque superficiei, & distantia foci radiorum parallelorum ab ipsa

ipsa lente; habetur valor m per formulam $m = \frac{ab}{(a+b)h} + 1$ (*), ubi a, b sunt radii sphæricitatum lentis utrinque convexæ, h distantia foci radiorum parallelorum, quam determinant observando distantiam imaginis objecti admodum remoti, ut solis, efformatam a radiis transmissis per lentem: si altera superficies sit concava; radius ejus sphæricitatis evadit negativus. Ea methodus non determinat, nisi quendam valorem m medium; cum adhibeat focum medium quendam tantummodo: sunt, qui eum valorem vocant mensuram refractionis radii albi. Refractio radii albi non est unica, sed multiplex, cum radius albus constet ex innumeris radiolis diversorum colorum, quorum singuli habent suam refractionem diversam. Ea methodus non potest exhibere singillatim valores m pertinentes ad eos diversos colores, adeoque nec differentiam binorum quorumvis, ut extremorum, quod requiritur ad habendam qualitatem distractivam diversorum vitrorum adhibendam in determinatione sphæricitatum pro telescopiis acromaticis.

100. Ad habendum eum valorem singillatim pro diversis coloratis filis, quæsitus est ab aliis focus per imaginem distinctam objecti colorati, adhibendo superficies corporum coloratorum coloribus diversis; ac alii ad eam rem usi sunt microscopiis, alii, ut Newtonus, adhibuerunt imaginem simplicem fili nigri circumvoluti ejusmodi superficiebus transmissam per lentem simplicem, & exceptam in satis magna distantia. Si habeatur distantia lentis tam a filo eodem, quam a loco imaginis distinctæ, ac illa dicatur d, hæc r; obtinetur distantia foci radiorum parallelorum

(*) Hæc formula facile deducitur e formulis Opusculi secundi: habetur ibi (cap. 1 num. 41) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, & $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$; unde eruitur $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, adeoque $f = \frac{ab}{b-a}$, & $m = \frac{f}{h} + 1 = \frac{ab}{(b-a)h} + 1$. Sed ibi radius secundæ superficiei erat negativus $= -b$, & hic ipsum fecimus $= b$, adeoque $\frac{ab}{b-a}$ evadit hic $\frac{ab}{a+b}$.

rum $h = \frac{dr}{d+r}$ (*); unde ope formulæ numeri superioris pro singulis coloribus haberetur m earum superficierum. Verum superficies corporum naturalium non reflectunt unicum radiorum coloratorum genus, sed plura ita, ut in superficie, quæ apparet rubra, vel violacea, dominentur tantummodo radii rubei, vel violacei reflexi in majore copia. Idcirco Newtonus ejusmodi experimento usus est tantummodo ad demonstrandum, radios violaceos esse magis refrangibiles, quam rubeos; & ad habendam refrangibilitatem singulorum radiorum coloratorum adhibuit divisionem spectri efformati a radio transmisso per prisma.

101. Adhibuit ipse quidem etiam imaginem efformatam a lente ad determinandam differentiam refrangibilitatis diversorum colorum, separando colores ope prismatis, & efficiendo, ut per conversionem prismatis ipsius jam alius color adveniret ad eandem partem paginæ conscriptæ, jam alius, & investigando differentiam distantiæ, in qua habebatur distincta imago litterarum paginæ ejusdem. Eo pacto habita simplicitate majore colorum primigeniorum, quam etiam reddiderat adhuc majorem contrahendo latitudinem spectri ope lentis adnexæ prismati, obtinuit majus discrimen, quam ante obtinuerat usus corporibus naturalibus, quæ semper reflectunt colores plures permixtos.

102. Adhibendo eo pacto colores prismaticos posset haberi non solum differentia inter diversos valores m, quam Newtonus quærebat, sed etiam valor m pro quovis colore, nisi adesset aliud in-

(*) Hæc formula demonstrari solet in vulgaribus Dioptricæ elementis: eruitur autem e formulis fundamentalibus lentium, quæ habebuntur in secundo Opusculo capite 1. Ibi num. 41 habetur $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, & r, h sunt valores iidem, ac hic; p vero distantia a lente puncti, ad quod radii supponuntur convergentes ante appulsum ad lentem, est idem, ac hic $-d$, cum d sit distantia puncti, a quo divergunt. Inde est $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{d}$, adeoque $\frac{1}{h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{d} = \frac{d+r}{dr}$, unde eruitur $h = \frac{dr}{d+r}$.

incommodum ex difficultate determinandi satis accurate valores a, & b radiorum sphæricitatis, quam habent binæ lentis superficies. Potest obtineri satis accurate radius sphæricitatis superficiei concavæ ope foci radiorum ab ea reflexorum. Si determinetur distantia, in qua ejusmodi superficies pingit maxime distinctam imaginem objecti admodum remoti; habetur radius sphæricitatis, qui est duplus ejusmodi distantiæ: quanquam si adhibeatur sol, vel aliquod e communibus terrestribus objectis, locus maximæ distinctionis erit semper nonnihil incertus, & augendo, ac minuendo distantiam mutatione sensibili prope illud maximum distinctionis, nulla sensibilis differentia apparebit in distinctione ipsa; ut accidit plerumque in maximis, & minimis magnitudinibus quantitatum variabilium, circa quos limites magnitudines plures sunt ad sensum æquales, ut idcirco in calculo differentiali quæratur locus maximi, vel minimi ponendo differentiam $= 0$.

103. Accuratius definitur distantia imaginis maxime distinctæ; si adhibeantur fila tenuia, atque id tam pro focis directis, quam pro reflexis: & quidem observatio instituetur admodum facile, & accurate sequenti pacto. Fiat in fenestra occlusa foramen non ita magnum, cui ex parte interiore conclavis obscuri affigatur charta amplior, & traducatur ipsi adjacens filum sericum, vel plura fila, quæ habeant tenuissimos excurrentes pilos, uti habere solent: tempore, quo sol trans ipsum foramen illuminat chartam, si lens habet superficiem concavam, apponatur e regione ipsius foraminis, & moveatur antrorsum, retrorsum cum exigua inclinatione: devenietur ad positionem, in qua ad latus ipsius foraminis apparebit imago ipsius in eadem charta, cum illo filo, cujus pili disparebunt in imagine, recessu, vel accessu perquam exiguo. Commodissimum ad eum usum est instrumentum figuræ 11 (Tab. II), in quo habetur foramen C ad id idoneum cum speculo, quod reflectat radium solis ad ipsum foramen, & illuminet chartam habentem filum sericum præfixum ipsi foramini. Distantia superficiei concavæ a foramine, erit radius sphæricitatis quæsitus; quia radii digressi e centro superficiei sphæricæ con-

concavæ debent reflecti ad perpendiculum, & redeuntes ad ipsum centrum ibi coire, ac imaginem exhibere, cujus distantiam nihil ad sensum turbat exigua illa inclinatio, quæ requiritur, ut detorta ad latus reddatur sensibilis.

104. Sed ea methodus non potest adhiberi pro superficiebus convexis, quæ requiruntur ad hoc, ut lens colligat radios transmissos, & usui esse possit formula (num. 99) $m = \frac{ab}{(a+b)h} + 1$. Adhibent ad eruendos radios sphæricitatis mensuram chordæ, & sagittæ, pro qua mensura habetur instrumentum cum cochlea, cujus motu prius usque ad superficiem planam, tum usque ad sphæricam, obtinetur sagitta, quæ est differentia binarum ipsius cochleæ positionum. Verum si cochlea ipsa non habeat perfectissimam æqualitatem; errores admittuntur immanes, potissimum in curvaturis exiguis, in quibus ea sagitta est perquam exigua. Et quidem illud semper cavendum, ubi agitur de inveniendis quantitatibus per observationes, ne quantitates ingentes, uti sunt radii sphæricitatum exiguæ curvaturæ, determinentur per exiguas, uti sunt sagittæ; quia tum error perquam exiguus in quantitate observata inducit errorem ingentem in quantitate inde deducta.

105. Ego habeo aliam methodum adhibendi lentes ad investigationem valoris m, quæ mihi exhibet simul & eum valorem respondentem radiis mediis, & utrumque radium sphæricitatis lentis etiam convexæ, quam exhibui in prima e quinque dissertationibus veteribus. Adhibeo ad eam rem tres focos, unum directum, quem radii paralleli transmissi efficiunt post binas refractiones in binis superficiebus, & binos reflexos, quos radii digressi a quodam puncto, & refracti in primæ superficie, tum reflexi a secunda, & iterum refracti a prima efficiunt in eadem distantia ad latus ejusdem objecti. Etiam si lens non sit isosceles, utravis superficies objiciatur radiis venientibus, focus directus habebitur in eadem distantia neglecto exiguo discrimine proveniente ab errore crassitudinis lentis; sed bini foci reflexi, qui habentur obvertendo radiis advenientibus jam alteram superficiem, jam alteram, habebuntur in diversis distantiis. Hæ di-

stantiæ pro focis reflexis admodum accurate habentur methodo numeri 103: distantia foci directi radiorum parallelorum obtineri potest immediate ope imaginis solis, vel objectorum terrestrium remotorum: sed multo accuratius deducetur ex imagine, quam efformant radii divergentes, adhibito illo tenui filo serico ejusdem foraminis ipsius numeri 103. Si enim satis removeatur lens ipsa a foramine; invenietur ultra lentem distantia, in qua per radios transmissos efformabitur imago distincta ejusdem fili, & productum binarum distantiarum lentis a foramine, & ab imagine divisum per earum summam exhibebit distantiam foci radiorum parallelorum juxta formulam $h = \frac{dr}{d+r}$ (num. 100).

106. Dicatur u hæc distantia foci directi radiorum parallelorum, & u', u'' sint binæ distantiæ focorum reflexorum ad locum divergentiæ, quæ obtinentur, ubi foramini obvertuntur superficies habentes radios a, & b. Si negligatur crassitudo lentis, inveni hujusmodi formulas simplices, & elegantes.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{u'} - \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{u''} - \frac{1}{u}, \quad \frac{1}{m-1} = \frac{u}{u'} + \frac{u}{u''} - 2$$

Ope harum formularum ex tribus valoribus observatis u, u', u'' eruuntur tres valores quæsiti a, b, m non prorsus correcti, ob effectum exiguum crassitudinis ipsius lentis: at correctiuncula ipsa facile itidem invenitur ope formularum satis simplicium, quas ibidem proposui, & demonstravi (*).

107. Hoc quidem pacto adhibito illo radio solis illuminante chartam cum filo, haberetur valor m respondens cuidam colori medio inter eos omnes, qui componunt radium album. Ad haben-

(*) Correctio est hujusmodi. Valores sic inventi, & nondum correcti dicantur a', b', m'. Iis addatur valor $\frac{1}{q'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{m'a'}$: fiat autem crassitudo lentis $= \alpha$. Habebuntur sequentes valores $\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - m'\alpha\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{b'} - m'\alpha\left(\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)$; $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $m - 1 = f\left(\frac{1}{u} - \frac{m\alpha}{q'^2}\right)$.

bendos valores m respondentes singulis coloribus oporteret adhibere objecta illuminata non a radio solis integro, sed a coloribus prismaticis: verum illorum lumen esset ita tenue, ut admodum difficulter possent discerni imagines reflexæ, quæ sunt admodum debiles; cum superficies vitrorum non inductæ stamno reflectant partem nimis exiguam luminis in eas incidentis. Accedit difficultas multo major instituendi ejusmodi observationem, quæ indiget illuminatione facta per colores prismaticos, & necessitas trium valorum u, u', u'', qui debent esse exigui: si enim lens haberet nimis magnam distantiam focalem; requireretur conclave nimis magnum: nam pro adhibenda methodo proposita determinandi distantiam foci directi radiorum parallelorum ope distantiæ foci radiorum divergentium, requiritur distantia imaginis ab objecto saltem quadrupla distantiæ focalis quæsitæ: præterea imago evaderet major, & idcirco languidior.

108. Ob ejusmodi considerationes censui, omittendum esse usum lentium ad eam determinationem, & adhibenda potius prismata, in quorum usu occurrunt difficultates multo minores. Ea communiter adhiberi solent alio pacto. Convertendo prisma circa proprium axem, refractionis quantitas variatur: ea evadit minima, cum radius intra prisma percurrit viam æque inclinatam ad binas facies anguli refringentis. Ea positio facile invenitur inter observandum: converso prismate spectrum incipit accedere ad locum, ad quem tendebat radius directus, tum recedit. In ea mutatione accessus in recessum refractio evadit minima. Capta mensura refractionis, quæ habetur in eo casu, formula est $m = \frac{\sin\cdot\frac{1}{2}(a+r)}{\sin\cdot\frac{1}{2}a}$ (*). Præferunt autem hanc methodum, quia

H 2 cum

(*) Hæc formula pro hac positione prismatis facile deducitur ex illa numeri 79 pro radio incidente ad perpendiculum in primam superficiem, quæ erat ibi $m = \frac{\sin.(a+r)}{\sin.a}$. Si enim concipiatur planum perpendiculare viæ radii intra prisma ductum per verticem anguli; ipsum prisma dividetur in duo, quorum

cum circa minimam refractionem plurimæ sint ipsi æquales ad sensum, exiguus error in positione minimi, non turbat valorem r, adeoque nec valorem m.

109. Ego præfero positionem prismatis, qua usus sum, habentem primam faciem perpendicularem radio incidenti ob plures rationes. In primis etiam ea positio admodum facile, & accurate præstatur; cum facile sit adducere ad foramen radium reflexum, efficiendo, ut in fig. 18 (Tab. IV) abeat V in G, & in fig. 19 V' in G'. Et quidem experienti patebit, motum sensibilem positionis prismatis, in quo margo radii reflexi recedat a foramine recessu exiguo, sed sensibili, puncta T, T' remanere eodem loco ad sensum. Porro in hac positione multo simplicior evadit theoria, & demonstratio formulæ, quam proposuimus num. 79. Refractio habetur unica in egressu: facillime demonstratur, angulum incidentiæ in secundam superficiem æquari angulo prismatis, & angulum refractum esse summam ipsius, & refractionis; unde profluit $m = \frac{\sin.(a+r)}{\sin.a}$. Valor anguli prismatis a est inveniendus æque in utraque methodo: valor r invenitur facilius in hac: facile enim adducitur in fig. 18 punctum H ad a, & in fig. 19 H' ad a', quo pacto habetur angulus PHT rectus, & notato solo puncto T, vel T', præter distantiam PH, vel P'H', habetur tangens refractionis accurata: in illa alia nisi negligatur via radii intra prisma, determinatio accurata refractionis est multo difficilior.

110. Accedit, quod error commissus in capiendo valore anguli a, & refractionis r, minus reddit erroneum valorem formulæ

rum singula habebunt pro angulo non totum angulum a prismatis integri, sed $\frac{1}{2}a$. Radius perveniet ad hoc planum, quod erit prima superficies partis secundæ, ad perpendiculum. Ob inclinationem vero eandem radii ad binas superficies radii integri refractio in ingressu erit æqualis refractioni in egressu, adeoque hæc erit dimidia refractionis totalis, & pro r oportebit adhibere $\frac{1}{2}r$.

læ $\frac{sin.(a+r)}{sin.r}$, quam formulæ $\frac{sin.\frac{1}{2}(a+r)}{sin.\frac{1}{2}a}$. Nam in primis refractio in nostra methodo, ex qua oritur prior formula, est major, quam in illa altera, ex qua oritur formula posterior: ipsa autem refractio determinatur ope tangentis: porro error commissus in tangente anguli majoris reddit minus erroneum ipsum angulum, quam error idem commissus in tangente anguli minoris, cum facile perspiciatur ex ipso augmento tangentium in infinitum, æqualibus incrementis angulorum respondere incrementa tangentium semper majora: ea sunt in ratione reciproca duplicata cosinuum, qui cosinus cum semper minuantur usque ad quadrantem, semper augentur illa tangentium incrementa. Deinde etiam si valor a, & r, æque augeatur, vel minuatur per errorem exiguum; magis augetur, vel minuitur valor $\frac{sin.\frac{1}{2}(a+r)}{sin.\frac{1}{2}a}$, quam valor $\frac{sin.(a+r)}{sin.a}$, saltem ubi anguli non sint majores iis, qui in ejusmodi observationibus occurrunt. Si sit $a = 20°$, $r = 12°$, & concipiatur uterque valor auctus per minuta 6; habebitur primo valor $\frac{sin.(a+r)}{sin.a} = \frac{sin.32°}{sin.20°} = 1,54938$, tum $= \frac{sin.32.° 12'}{sin.20.6} = 1,55059$, quorum differentia 0,00121: at valor $\frac{sin.\frac{1}{2}(a+r)}{sin.\frac{1}{2}a}$ primo quidem $= \frac{sin.16°}{sin.10} = 1,58733$, tum $= \frac{sin.16.° 6'}{sin.10.3} = 1,58913$, quorum differentia 0,00180. Nimirum ex eodem errore valorum a, & r, minor error profluxit in formula nostræ methodi, quam in illa altera. Inde patet, hanc non solum non esse inferiorem illâ communi, sed esse ipsi præferendam.

111. Siquis velit ex sola observatione figuræ 18 elicere non solum valorem m primi rubei, sed etiam postremi violacei; poterit

terit sane; & ad eam rem satis erit notare ibi præterea puncta H', & T'. Et quidem si quæratur is valor non accuratus, sed vero proximus; res admodum facile perficietur: satis erit negligere exiguam refractionem, quam habebit radius A'G'N' in N', adeoque considerare punctum P', ut positum in recta N'H': tum habere rectam P'H' pro æquali rectæ PH, & angulum P'H'T' pro recto: dempta enim *i*H' ab *i*T', remanebit H'T', quæ divisa per P'H' exhibebit tangentem refractionis H'P'T' $= r$: habito autem itidem angulo incidentiæ in P' ut æquali angulo prismatis a, eadem formula $\frac{sin.(a+r)}{sin.a}$ exhibebit m pro radiis violaceis. Is valor erit parum remotus a vero, ob nimis exiguam divergentiam rectarum FH, FH'; ac nimis exiguam distantiam punctorum PP', & multo minorem puncti P a recta FN'H'. Verum adhuc remaneret error non exiguus respectu differentiæ binorum m, qui cum facile evitari possit, debet omnino.

112. Evitari posset is error instituto calculo accurato, dummodo habeantur magnitudines foraminum AA', GG'. Eorum ope inveniretur punctum F, quod factis æqualibus iis foraminulis erit in medio inter ipsa. Inde facile computaretur angulus GFG', qui esset æqualis angulo incidentiæ in N', ob FN perpendicularem primæ faciei in N. Ejus ope inveniretur refractio in N', & punctum proximum puncto H', ad quod tenderet radius G'N', ac ex distantia GH erueretur magnitudo lineolæ PP', distantia perpendicularis puncti P' a pariete, angulus, quem cum ipsa contineret tam directio N'P' producta, quam radius refractus P'T', quorum differentia exhiberet angulum refractum: angulus incidentiæ in superficiem KM itidem inveniretur ex inclinatione lineæ FN' ad FN, ac refractione in P', quibus angululis differt angulus incidentiæ radii N'P' in P' ab angulo incidentiæ radii NP in P æquali angulo prismatis. Hæc omnia admittunt calculum accuratum: sed is calculus est admodum prolixus; adeoque multo melius erit semper mutare nonnihil positionem instrumenti, & figuræ 18 substituere figuram 19, in qua radius postremus violaceus incidat ad perpendiculum in parietem, & in primam prismatis super-

perficiem, quo pacto calculus pro valore m coloris extremi violacei est idem, ac pro eodem pertinente ad colorem primum rubeum.

113. Si quis contentus sit valoribus tantummodo vero proximis; is poterit eos obtinere multo facilius observatione crassiore, ac sine heliostata poterit metiri distantiam foraminis primi a pariete, & determinare distantiam illius ab hoc ope fili tensi: ductâ in pariete rectâ ad sensum horizontali, determinabit in ipsa ope fili paullo longioris bina puncta æque distantia ab ipso foramine, & sectâ bifariam distantiâ eorum punctorum, accipiet punctum sectionis pro perpendiculari a foramine in eam rectam, ac radium solarem eo diriget: collocato prismate, assumet distantiam foraminis a secunda facie, a qua prodire debet is ipse radius, subtrahendam a distantia ejusdem foraminis a pariete ad habendam distantiam prismatis ab ipso pariete: notabit bina puncta extrema spectri detorti horizontaliter, & celeriter summoto prismate, notabit bina puncta extrema diametri horizontalis imaginis directæ: deducet refractionem primi rubei, & extremi violacei, concipiendo radium directum tendentem ad bina extrema puncta diametri horizontalis notata, ut perpendicularem parieti, & assumet distantiam radii primi, & ultimi directi a refracto, quam habet in ipso pariete interjacentem inter puncta notata in imagine naturali, & iis respondentia notata in spectro, ac ea dividet per distantiam prismatis a pariete, assumendo quotum pro tangente refractionis: additis singulis refractionibus angulo prismatis, & diviso sinu summæ per sinum anguli prismatis, habebit binos valores m pro radiis extremis: sed ejusmodi determinatio non poterit esse nisi admodum crassa.

114. Si angulus prismatis sit satis exiguus, ut anguli assumi possint tanquam proportionales suis sinubus; formula $m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}$ evadit $\frac{a+r}{a} = 1 + \frac{r}{a}$. Quamobrem inventa refractione, satis erit illam dividere per angulum prismatis, & adjecta unitate, habebitur m. Verum ista omnia crassiora sunt; nec satis magna accuratio haberi poterit, nisi adhibita methodo, quam in superiore paragrapho proposuimus.

115. Pro

115. Pro observationibus pertinentibus ad figuram 20, quæ sunt propositæ a num. 81, locus erit admodum opportunus; si habeatur duplex conclave aliud post aliud ita, ut fenestræ prioris respondeat porta ducens ab eo ad secundum, cum pariete secundi respondente ipsi portæ. In fenestra primi conclavis potest apponi instrumentum BB', ex quo radius tendet ad portam existentem in DD': in hac habebitur foramen GG', cum mensula adnexa portæ intra conclave secundum: ei mensulæ imponetur machinula habens prisma primum cum regula *be*: hoc pacto satis erit intra secundum conclave unicus heliostata, supplente vicem alterius porta ipsa. Habebitur eo pacto plus spatii a secundo prismate ad parietem; adeoque quantitates determinantes refractionem poterunt esse satis magnæ: habebitur autem in secundo conclavi eo pacto obscuritas multo major, quam ubi machinula BB' habetur in eodem conclavi: nam ex ipsa semper habetur aliquid luminis, quod reflexum a partibus ipsius internis, & transmissum per foraminulum AA' diluit obscuritatem: ipsa autem obscuritas major est utilis in eo observationum genere ad agnoscendum melius in pariete radium transmissum a secundo heliostata, qui potissimum, ubi agitur de violaceis, est admodum debilis post distractionem factam a primo prismate efformante spectrum in tabella verticali *dd'* in *tt'*. Potest autem id duplex conclave esse admodum utile etiam pro observationibus figuræ 18, & 19, efficiendo, ut foramen GG' possit promoveri nonnihil, ut in heliostata. Habebitur major obscuritas, & major distantia a pariete idonea ad habendas majores lineas, quibus determinatur refractio.

116. Ubi pro figura 20 adhibetur duplex conclave poterit ope instrumenti figuræ 9, determinari valor *m* respondens cuivis numero colorum, & substantiæ, ex qua constat prisma variabile, qui colores omnes redeant semper iidem, quotiescumque quis voluerit: nam porta clausa reddet semper positiones easdem foraminis secundi respectu primi: mensula sustinens primum prisma restituetur semper ad positionem eandem; si fiant in pavimento certa signa, quibus semper imponantur cuspides adnexæ pedibus

secun-

secundi heliostatæ, restituent hunc etiam in eundem locum, quam restitutionem confirmabunt eadem signa *t*, *t'* figuræ 20 respondentia iisdem signis regulæ *be*. Tum mutata positione ejus regulæ, per signa diversa primæ observationis semel factæ, habebuntur colores prorsus iidem. Ea restitutio reddet multo faciliorem determinationem valorum *m* respondentium illis iisdem coloribus in omnibus aliis substantiis methodo, quam exhibebimus in §. sequenti: nulla erit in ea methodo necessitas perpendiculi PX, nec mensurarum XT, XH. Comparando prisma efformatum ex aliis substantiis cum prismate variabili methodo, quam ibi jam exponemus, habebitur valor quæsitus multo facilius deducendus ex invento semel pro prismate variabili.

117. Quando adhibetur duplex conclave, oportet habere adjutorem clausum in primo, qui facto identidem motu exiguo machinulæ BB' retineat semper imaginem CC' in positione amplectente foramen GG'.

118. Pro fig. 18, & 19 præscriptum est num. 70, ut angulus K, & accentus litterarum A'C'D'O' sint ad lævam aspicientis fenestram. Id præscriptum est pro ea collocatione prismatis variabilis, quam exhibet figura 9, in qua angulus satis magnus ipsius prismatis efformatus majore apertura circini remanet ad lævam aspicientis ipsum a centro versus margines, uti aspicitur ab eo, qui ipsum imponit mensulæ ante foramen transmittens radium, qui nimirum aspicit fenestram: hinc is angulus remanet ad dexteram aspicientis parietem. Ea collocatio prismatis variabilis est omnino necessaria, ubi non habetur spatium in pariete a situ *aa'* perpendiculi, nisi ad lævam aspicientis fenestram: nam refractio fit semper ad partem oppositam cuspidi anguli refringentis. Si in pariete non haberetur spatium, nisi ad dexteram; tum frustum minus prismatis variabilis disponendum esset ita, ut angulus efformaretur ad lævam respectu aspicientis parietem, quæ esset dextera respectu aspicientis fenestram, & instrumentum a centro versus margines: in ea figura parallelismus habetur, ubi frustum minus adducitur ad extremum dexterum majoris: tum vero ipsum invertendo juxta num. 21, adduceretur ad sinistrum ad ha-

bendum parallelismum. In eo casu figuræ 18, 19, 20 invertendæ essent, abeuntibus accentibus a parte dextera spectantis parietem ad sinistram, ut remaneant eo modo, quo remanerent, si per modum typi cujusdam ea tabella imprimeret suas figuras chartæ alteri, quas in ea exhiberet utique inversas. Sed de iis omnibus jam satis.

§. XII.

Usus tertius: determinatio vis refractivæ aliarum substantiarum.

119. INVENTA semel qualitate refractiva substantiæ prismatis variabilis, qualitas refractiva cujusvis alterius invenietur observatione admodum simplici. Adjungatur exiguum prisma ex ea substantia frusto minori prismatis variabilis ita, ut altera ejus facies contingat faciem ipsius planam, & vertex ejus anguli jaceat versus eum marginem frusti majoris, in quo habetur parallelismus instrumenti, nimirum in constructione huc usque adhibita ad dexteram: ita aperto magis instrumento, & ejus angulo efformato (num. 31) ex parte sinistra, angulus prismatis constantis erit contrarius angulo variabilis. Eam positionem videre est in fig. 22: ANLC, NOML sunt bina frusta in ea positione, quam habent in fig. 8 cum angulo Q facierum planarum ad lævam: EDB est prisma constans adjacens frusto minori cum suo angulo D ad dexteram. Instrumentum habens hæc duo prismata conjuncta apponendum est vel ante foramen AA' (fig. 18) machinulæ BB', vel potius ante foramen GG' heliostatæ.

120. Sed in casu heliostatæ prius notandæ erunt in pariete binæ breves lineæ verticales, quæ tangant imaginem directam in H, H', nec pro hac observatione est necessarius incursus radii in parietem ad perpendiculum, nec linea OO', nec ulla divisio, nec ulla mensura accipienda in ipso pariete, nec distantia prismatis a pariete. Satis est transmittere radium ad parietem, & notare in ipso, vel charta ipsi affixa, binas illas verticales, quæ tan-

tangant imaginem naturalem hinc, & inde. Iis notatis admovendum est instrumentum foramini ita, ut facies ED prismatis fixi figuræ 22 excipiat radium ad perpendiculum, nimirum ut remittat imaginem reflexam ad ipsum foramen.

121. Apparebunt quidem plures imagines reflexæ: nimirum habebitur una reflexa a superficie ED, tum aliæ binæ a superficiebus BM, NL, si bina vitra non se penitus contigerint ita, ut nullum omnino spatiolum intercedat utcunque exiguum, quod fere nunquam accidet, & si vis utriusque vitri non fuerit prorsus eadem, quæ quidem in binis frustis erit eadem pro NL, si ea excisa sint ex eadem massa vitri ejusdem, ut debent, & erit fere semper diversa saltem nonnihil, si prisma fixum fuerit ex diverso vitri genere. Habebitur semper & quarta reflexa a superficie AC. Sed facile erit dignoscere illam, quæ remittitur a prima. Inprimis ea erit vividior reliquis, quæ erunt languidiores ob lucem radii jam imminutam a prima reflexione, & a transitu per aliquod intervallum vitri, quod nunquam est prorsus perspicuum: præterquam quod reflexio semper est minor in transitu per superficiem dirimentem bina media minus heterogenea, uti sunt bina vitra, quam in transitu ex aere in vitrum, quod reddet secundam, & tertiam imaginem minus vividam primâ, ac tertiam præterea reddet minus vividam major expansio luminis: nam radius reflexus a superficie curva convexa, ut est NL respectu radii advenientis, distrahitur, & efficit imaginem majorem, quæ ipsa ejus forma impediet, ne confundatur cum tribus reliquis. Prima ipsa erit sine ullo colore, secunda a refractione primæ superficiei habita in reditu habebit colores, & quidem satis vividos respondentes angulo prismatis D. Quarta itidem erit admodum colorata, quotiescumque superficies AC non accesserit ad parallelismum cum ED: sed etiam in eo casu facile erit ipsam distinguere a prima, nam mutata apertura instrumenti per motum solius cruris habentis frustum majus, ipsa mutabit positionem, dum reliquæ immoto altero crure remanent immotæ.

122. Ad maximam accurationem observationis deberet ita collo-

locari instrumentum motu exiguo horizontali supra tabellam, cui imponitur, ut ubi agitur de determinatione valoris *m* pro primo radio rubeo, congruant extrema puncta V, G figuræ 18, & ubi agitur de violaceo, congruant extrema V', G' fig. 19; sed satis erit pro utroque id efficere, ut imago reflexa VV' congruat proxime cum foramine GG', quia experienti patebit, uti etiam diximus num. 109, mutationem loci ejus imaginis respectu foraminis, quæ sit exigua, sed adhuc sensibilis, nullam inducere sensibilem mutationem in loco imaginis HH', quod hic iterum innuisse sit satis: adeoque in sequentibus præscribemus tantummodo regressum imaginis ad foramen pro radio incidente ad perpendiculum.

123. Illud etiam hic tantummodo monebimus iterum, quod monuimus num. 73, facile fieri ope cochlearum figuræ 14 (Tab. III), ut imago reflexa a prima superficie non abeat supra, vel infra foramen: elevando latus FG tabulæ ejus figuræ, vel deprimendo latus IH æque per utramque suam cochleam, fiet, ut imago reflexa descendat: contra deprimendo illud, vel elevando hoc, fiet, ut ea ascendat, donec habeat altitudinem eandem respectu foraminis; qua obtenta, motus instrumenti horizontalis in latus eam adducet ad foramen ipsum: & itidem exigua elevatio supra foramen, vel depressio infra nihil ad sensum nocebit observationi; patebit enim, exiguo, sed adhuc sensibili eo motu locum imaginis transmissæ in pariete non mutari ad sensum. Ubi non adhibetur heliostata, ipse motus solis inducet exiguam mutationem in loco ejus imaginis ob mutatam directionem radii incidentis; sed ubi adhibetur heliostata, nulla habetur mutatio ejus incidentiæ, quod ejus usum pro hac etiam observatione commendat præter immobilitatem imaginis directæ in HH' (fig. 18 Tab. IV) in hac potissimum observatione utilissimam.

124. Si prismata omnia sint satis accurate elaborata, & bene collocata; omnes 4 imagines reflexæ jacebunt in eadem altitudine. Ad id requiritur, ut (fig. 22) facies rectangulæ ED, & BD prismatis fixi sint accurate perpendiculares basi triangulari EDB, quæ instrumento imponitur, & superficies quadrilineæ OM, AC utrius-

utriusque frusti prismatis variabilis accurate perpendiculares basibus planis mixtilineis NOML, ANLC, ac æque distantes a centro sphæricitatis superficierum curvarum, sine qua conditione, impositis basibus eidem plano instrumenti, binæ superficies sphæricæ non congruent sibi invicem prorsus accurate. Exiguus error in iis omnibus inducet exiguam aberrationem earum imaginum, sed observationi non oberit ad sensum. Aliquod ex ejusmodi vitiis potest etiam corrigi per idoneam collocationem. Sic si basis triangularis BDE non esset accurate perpendicularis faciebus quadrilineis ED, BD, quo casu rectâ BD adductâ ad faciem OM in imo prismate, vel in summo, facies ipsæ non congruent, sed supererit hiatus in summo, vel in imo, & secunda imago reflexa duplicabitur. Id vitium facile corrigitur supposita modica cera lateri ED, vel BD, cujus ope comprimendo ipsam reducentur eæ duæ superficies ad contactum, abeuntibus binis illis superficiebus in unicam.

125. Iis ita dispositis, si prisma variabile adducatur ad positionem parallelismi; habebitur in pariete spectrum coloratum ejusdem formæ, & eodem loco, uti haberetur, si remoto prismate ipso variabili radius traduceretur per solum prisma constans. Concipiantur binæ superficies BM nonnihil remotæ a se invicem motu parallelo ita, ut jam accipiant velum tenue aeris intermedium; radius egressus e secunda superficie prismatis fixi nullam in eo casu sensibilem novam mutationem pateretur a binis superficiebus extremis planis prismatis variabilis ob ipsarum parallelismum, ob quem superficies secunda destruit quidquid prima efficit. Sic radius per vitra fenestræ bene complanata nullam subit mutationem sensibilem, & vitrum planis, & bene politis superficiebus terminatum, si apponatur ad os telescopii dioptrici, vel catadioptrici, non turbat distinctionem, & positionem imaginis: minuit tantummodo nonnihil vim luminis ob radios reflexos a binis superficiebus, & interceptos intra ipsas a defectu perspicuitatis, quæ in nullo corpore est omnino accurata, & perfecta. Porro si ita minuatur distantia, ut jam deveniatur ad contactum, & radius sine aere intermedio transeat immediate a primo vitro in

in secundum ; nulla itidem sensibilis mutatio fit in radio transeunte : tantummodo acquiritur plus luminis , quia duplici reflexioni satis forti factæ in binis superficiebus internis succedit unica admodum tenuis , vel etiam nulla . Tantum ubi illud aeris velum evadit nimis tenue , incipiunt haberi colores quidam tenuium laminarum , de quibus Newtonus egit fuse in parte secunda suæ Opticæ , & quorum origo est admodum diversa ab origine colorum , quos parit diversa refractio diversorum colorum .

126. Ob eam causam semper , ubi duo prismata , vel duæ lentes sphæricitatum contrariarum , & æqualium ita sibi invicem applicantur , ut facies internæ se contingant , licebit pro tribus superficiebus refringentibus considerare 4 , & formulæ inventæ pro refractionibus , quarum singulæ pertineant ad singula prismata , vel lentes singulas , applicari poterunt ad casum ejus contactus , tanquam si velum aeris intercederet . Hinc etiam si fiat prisma vacuum terminatum binis laminis vitreis bene complanatis , & politis , immisso quovis liquore ; refractio ejus prismatis assumi poterit pro ea , quæ haberetur a prismate liquoris solius , si ipsum adhiberi posset suspensum in aere , conservatâ illâ eâdem formâ prismaticâ .

127. Cum angulus D figuræ 22. habeat positionem contrariam angulo K figuræ 18 ; substituto toto systemate prismatis variabilis habentis facies planas parallelas , & prismatis constantis , quod habetur in figura 22 , loco prismatis simplicis , quod habetur in fig. 18 , spectrum TT' abibit in ipsa fig. 18 respectu loci naturalis HH' non versus O , ut ea figura exprimit , sed versus O' , nimirum non ad dexteram aspicientis fenestram , & lævam aspicientis parietem , & ipsum spectrum , sed ad lævam illius , dexteram hujus : nimirum abibit ad plagam oppositam ei , ad quam jacet cuspis prismatis fixi , cujus solius effectus tum habetur .

128. Aperto magis instrumento (claudendum esset in casu , in quo parallelismum induceret ingens apertura , non exigua) , orietur angulus prismatis variabilis oppositus angulo prismatis constantis , cujus refractionem idcirco incipiet destruere , spectro ten-

dente

dente versus HH' ; donec deveniat ad ipsum locum naturalem HH'. Si omnes facies planæ fuerint accurate perpendiculares basibus insistentibus eidem plano instrumenti ; deveniet ipsum spectrum ad lineas verticales ductas per H, & H' in eadem prorsus altitudine, in qua ibi habebatur prius imago circularis alba exhibita a radio directo : & si prisma constans fuerit ex eadem substantia cum variabili ; spectrum adveniens ad eum locum naturalem apparebit album : si præterea omnes facies, quæ debebant esse planæ, fuerint accurate tales, nimirum prorsus expertes cujuslibet curvaturæ ; spectrum eo delatum habebit magnitudinem eandem, quam prius habuerat ipsa imago naturalis, & eandem formam circularem : id enim accidet ibi, ubi binæ facies externæ evaserint parallelæ ; adeoque ibi radii transibunt ad sensum irrefracti. In eo casu radius, qui incidet accurate perpendicularis, progredietur sine ulla refractione : reliqui habebunt quidem exiguam inclinationem ad eas superficies ob exiguam divergentiam radiorum se intersecantium in F : sed ea obliquitas erit perquam exigua, adeoque perquam exigua refractio facta in prima superficie, & ea ipsa corrigetur refractione contraria in egressu. Res accidet eodem modo, quo in transitu per laminam vitream terminatam binis superficiebus parallelis, & in eo casu instrumentum exhibebit angulum prismatis variabilis æqualem prorsus angulo prismatis fixi : auctâ autem aperturâ adhuc magis, spectrum abibit ad partes oppositas respectu HH', nimirum versus O, uti ipsum figura exhibet in TT'. In eo transitu per locum naturalem fiet inversio positionis colorum : ante appulsum ad HH', margo spectri T' respiciens O erit rubeus, & T respiciens O' violaceus : in HH' unitis coloribus omnibus habebitur albedo ; post transitum color rubeus erit in T, & violaceus in T'. Omnia nimirum in eo casu accident, ut paragrapho 9 : nam bina prismata variabile, & constans, efficient unicum prisma variabile compositum ex eadem unica substantia, tanquam si prisma fixum, & frustum minus prismatis variabilis, constituerent unicum frustum habens crassitudinem majorem æque terminatum binis superficiebus altera plana, altera concava.

129. Si

129. Si superficies, quæ debebant esse planæ, habuerint aliquam curvaturam; tum spectrum habebit latitudinem majorem, quam imago naturalis, vel ea minorem, & in ipso appulsu ad locum naturalem apparebit quidem circularis, sed erit major, vel minor, quam imago naturalis; verum si curvatura fuerit admodum exigua, id quidem observationi nihil oberit ad sensum. Sed si facies planæ prismatis constantis, & fixi non fuerint accurate perpendiculares basibus suis, vel etiam existente accurata constructione eorum prismatum, & collocatione prismatis variabilis, prisma constans habuerit basim triangularem ED (fig. 22) nonnihil inclinatam ita, ut cuspis D ejus trianguli fuerit elevatior, vel depressior, quam basis EB, tum vero spectrum adveniens ad lineas illas verticales in HH', erit in primo casu e contrario depressius, in secundo elevatius loco, quem inter eas lineas occupaverat imago.

130. In iis casibus spectrum non erit accurate album ubique, sed in primo casu margo superior erit rubeus, inferior violaceus, & e contrario in secundo inferior rubeus, superior violaceus. Deerit nimirum parallelismus facierum, & habebitur inclinatio earundem, quarum productiones continerent angulum quendam refringentem in primo casu ad partes superiores, in secundo ad inferiores. Reducetur spectrum ad locum ipsum imaginis naturalis elevando nonnihil basim EB in primo casu, cuspidem D in secundo: id facile præstabitur supponendo ipsi basi, vel cuspidi modicum chartæ simplicis, vel ita plicatæ, ut sit dupla, vel tripla, vel magis multipla: facilius id fiet; si basis ipsa triangularis habuerit modicum ceræ suppositum tam versus cuspidem, quam versus basim: nam comprimendo cuspidem, vel basim deprimetur illa, vel hæc, & reducetur spectrum ad altitudinem ipsam imaginis naturalis, in qua jam habebitur albedo accurata. Facile paratur etiam instrumentum constans binis lamellis metallicis ita conjunctis ad angulum variabilem, ut ope cochleæ transmissæ per superiorem, & innixæ inferiori, possit angulus ipse earum superficierum augeri, & minui. Nam imposito superiori lamellæ prismate constanti, facile ope ejus cochleæ

chleæ elevabitur, vel deprimetur cuspis respectu basis ejus trianguli.

131. Quod si prisma fixum additum variabili fuerit e diversa substantia; inversio spectri fiet ante appulsum ad locum naturalem, vel post; prout substantia fixi habuerit qualitatem distractivam minorem, vel majorem, quam substantia variabilis, nec ipsa inversio fiet transeundo per colorem album compositum ex conjunctione momentanea omnium filorum coloratorum, sed per unionem successivam illam, quam innuimus num. *96*. Ea inversio pertinet ad methodum determinandi qualitates distractivas substantiarum ope hujus instrumenti, de qua agemus paragrapho sequenti; & multo melius perspicitur in imagine efformata a radio integro transmisso ad parietem sine heliostata. Hic pro determinatione vis refractivæ, considerandus erit appulsus spectri ad locum imaginis naturalis.

132. In ipso loco imaginis naturalis pro imagine alba habebitur margo dexter, & sinister tinctus coloribus oppositis, qui quidem erunt satis largi, si binæ substantiæ habuerint satis diversam qualitatem distractivam, ut si prisma variabile sit e flint, & fixum e vitro communi, vel vice versa: erunt autem perquam exigui, si binæ substantiæ habuerint in ea qualitate discrimen exiguum, ut si ambæ sint vitrum commune, vel ambæ flint: si superficies planæ prismatum fuerint accurate tales; altitudo spectri erit æqualis altitudini imaginis naturalis: longitudo ipsius horizontalis erit paullo major in casu, in quo substantiæ fuerint parum dissimiles, adeoque colores marginum tenues, & multo major in casu substantiarum valde dissimilium, in quo colores ipsi erunt largi: idem discrimen in latitudine, & vi colorum habebitur, si prisma fuerit paullo minus accurate elaboratum, ut nimirum superficies, quæ debebant esse planæ, habeant aliquam exiguam curvaturam; sed altitudo spectri poterit esse major, vel minor altitudine imaginis naturalis, & longitudo diversa ab ea, quam præstarent superficies planæ; minor etiam longitudine imaginis naturalis, licet hanc augeat in ipso spectro distractio colorum. In omnibus hisce casibus oportebit adducere ipsum spe-

ctrum ad locum imaginis naturalis, & notare angulum prismatis variabilis, in quo fit is appulsus ad locum naturalem. Observatio fiet sequenti pacto.

133. Summoto instrumento notetur in pariete opposito locus imaginis naturalis traductæ per heliostatam, ducendo in ipso, vel in charta ipsi applicata binas lineas verticales, quæ eam tangant hinc, & inde. Tum posito instrumento ante foramen heliostatæ ita, ut imago reflexa a prima superficie prismatis fixi applicati frusto minori prismatis mobilis redeat ad foramen ipsum, aperiatur instrumentum, donec bini margines spectri æque distent a binis lineis verticalibus, quæ includebant imaginem naturalem: notetur numerus graduum, & minutorum, quem tum habet apertura instrumenti: ejus differentia ab apertura parallelismi erit angulus prismatis variabilis reducens spectrum ad locum naturalem. Is erit angulus destruens refractionem mediam prismatis fixi.

134. In casu, in quo substantiæ parum dissimiles exhibuerint colores tenues, & spectrum longitudinis paullo majoris imagine naturali, facilius æstimatione satis accurata determinabitur positio spectri excurrens æque hinc, & inde ultra lineas verticales imaginis naturalis: ubi colores ob majorem substantiarum differentiam fuerint multo largiores; tum vero poterit prius adduci alterum extremum ad unam ex iis lineis, tum alterum ad alteram: habebuntur bini anguli prismatis variabilis, quorum alter destruet refractionem primi rubei, alter postremi violacei. Angulus medius inter eos binos observatos assumendus erit pro angulo destruente refractionem coloris medii. Possent duci etiam aliæ binæ, vel ternæ lineæ verticales prope singulas illas priores, quæ imaginem naturalem tangebant, ad distantias æquales exiguas: tum facile judicari poterit, quando margines spectri æque distabunt a primis binis lineis, medio spectro occupante locum mediæ imaginis naturalis: sic unicus angulus indicabit destructionem refractionis coloris medii.

135. Ex eo angulo cum angulo prismatis fixi determinato ope ejusdem instrumenti juxta num. 43, & valore m respondente colori medio in substantia prismatis variabilis invenietur valor m re-

respondens eidem colori medio in substantia prismatis fixi per sequentes formulas, quarum fundamentum habetur in secunda ex illis dissertationibus veteribus, & habebitur demonstratio in primo e supplementis hujusce Opusculi.

Angulus prismatis fixi . . . . a
Angulus prismatis variabilis destruens refractionem . . . b
Ratio sinuum pro colore medio in substantia prismatis variabilis . . . . M

136. Binæ formulæ exhibent valorem m exactum ope valoris subsidiarii x: is deducitur ex altera, & ope ipsius altera præbet ipsum valorem quæsitum : sunt autem

$$\text{I. } sin.(b-x)=\frac{1}{M}\times sin.(b-a). \quad \text{II. } m=\frac{M\, sin.x}{sin.a}$$

Per primam obtinetur angulus $b-x$ ex suo sinu, qui angulus ablatus ab angulo b, vel illi additus, prout $b-a$ fuerit valor positivus, vel negativus, relinquet angulum x. Eo habito patet, haberi m e secunda formula, in qua tum omnia sunt data.

137. Hæ formulæ exhibent valorem quæsitum, utcumque sint magni anguli a, & b, & utcumque sit magna eorum differentia: simplicitas formulæ, quæ involvit solos sinus angulorum datorum, oritur ex ingressu perpendiculari in primam superficiem, qui relinquit solas binas refractiones in transitu a primo prismate in secundum, & a secundo in aerem; eo enim pacto res reducitur ad effectum unici prismatis habentis in binis superficiebus rationem sinuum diversam. Sine ea conditione requireretur calculus complicatissimus ad habendam formulam exactam, vel expressio minus exacta angulorum per suos sinus, quam alii Geometræ adhibuerunt. Eadem simplicitas occurret ob eandem rationem in §. sequenti. Ubi agitur de vitris, poterit haberi formula multo simplicior sine ullo periculo erroris, qui sensu percipi possit. Nam in iis qualitas refractiva parum est diversa, utcumque distractiva plurimum differat. Hinc valor b prismatis variabilis non differt a valore a prismatis fixi, nisi per gradus paucissimos, quo casu sinus, & tangens valoris $b-a$ potest assumi ut æqualis arcui: idem fieri potest in valore $b-x$, qui est adhuc minor va-

 lore.

lore $b-a$ ob ejus sinum æqualem in prima formula sinui hujus diviso per valorem M majorem unitate. Rem ita se habere, patebit ex ipsa observatione. Tum prima formula evadet $b-x = \frac{b-a}{M}$, & $x = b - \frac{b-a}{M}$. Fiat $b-a=h$, adeoque $b=a+h$, erit $x=a+h-\frac{h}{M}$, & facto $h-\frac{h}{M}=n$, erit $x=a+n$, adeoque $sin.x = sin.(a+n) = sin.a\,cos.n + sin.n\,cos.a$. Ob angulum n minorem exiguo $b-a$ poterit pro ejus cosinu poni radius $= 1$. Quare in secunda formula habebitur $m = \frac{M\,sin.a + M\,sin.n\,cos.a}{sin.a} = M + M\,sin.n\,cot.a$.

138. Hæc formula non indiget inventione anguli x, ex suo sinu, sed exhibet quantitatem exiguam $M\,sin.n\,cot.a$ addendam valori M, vel ab ipso demendam, prout valor n fuerit positivus, vel negativus: is erit positivus, si angulus a prismatis fixi fuerit minor, quam b prismatis variabilis: is autem est minor, qui pertinet ad substantiam magis refractivam, cujus minor angulus sufficit ad compensandam refractionem contrariam alterius. Cum valor n sit exiguus; satis erit adhibere 4 notas in logarithmis post characteristicam. Idem fiet, ubi inveniendus erit valor $n = h - \frac{h}{M} = (b-a) - \frac{b-a}{M}$: satis erit in complemento logarithmico valoris M, & in logarithmo numeri $b-a$ reducti ad minuta assumere pariter 4 notas. Non potest poni valor n pro $sin.n$, ob defectum alterius termini homologi, qui a scala sinuum reducatur ad minuta, vel in aliquo divisore ejusdem formulæ, vel in altero membro æquationis, in quibus solis casibus licet transire ab una scala ad aliam.

139. Si ipsi anguli a, b sint exigui; formula evadit multo simplicior: nam ex prima habebitur, ut prius, $x = b - \frac{b-a}{M}$, & e secunda $m = \frac{Mx}{a} = \frac{Mb}{a} - \frac{b}{a} + 1 = \frac{b(M-1)}{a} + 1$. Sed si anguli adhibeantur majores; errores commissi in eorum determina-

minatione nimis turbabunt valorem formulæ exhibentis quæsitum *m*.

140. Si adhibeantur seorsum anguli *b*, qui destruunt refractionem alter primi rubei, alter postremi violacei, efficiendo, ut appellat prius alter margo spectri ad lineam respondentem alteri margini imaginis naturalis, tum alter ad respondentem alteri, ac pro M assumatur jam valor prismatis variabilis respondens alteri colori, jam valor respondens alteri, habebuntur singillatim valores *m* respondentes iisdem coloribus extremis, quorum semisumma exhibebit *m* pro mediis propositum num. 63: differentia eorum valorum exhiberet in casu superficierum prismatis accurate planarum valorem *dm* adhibendum pro qualitate distractiva. Habebitur quidem valor *m* satis accuratus, & quamproxime idem, qui obtinetur immediate ex *b* medio per calculum breviorem; sed valor *dm* posset obvenire nimis erroneus ob difficultatem obtinendi ea methodo *m* ita accuratum, ut error sit exiguus etiam respectu differentiæ, & difficultatem multo majorem assumendi eundem rubeum, & eundem violaceum, ubi assumuntur pro prismatis fixis binæ substantiæ combinandæ altera post alteram. Ratio binorum *dm*, quæ sola adhibetur in objectivis compositis e binis substantiis multo accuratius, & æque facile obtinebitur per aliam observationem in §. sequenti.

141. Verum pro objectivo, quod per tres substantias conjungat tres colores, poterunt haberi tres valores *m* respondentes tribus coloribus satis accurati ad eam rem, immo etiam plures quotcumque per observationem figuræ 20 (Tab. IV). Si nimirum semel notatæ fuerint positiones utriusque heliostatæ, & prismatis primi K ope regulæ *be*, & spectri *ss'* respondentes observationibus expositis a numero 82, in quibus determinati semel fuerint valores *m* plurium colorum pertinentes ad substantiam prismatis variabilis; eædem positiones utriusque heliostatæ poterunt restitui semel, tum eædem positiones prismatis K aliæ post alias, quæ transmittent in parietem in HH' eosdem illos colores. Pro singulis notato puncto altero, ut H, & applicato instrumento cum prismate variabili, & fixo conjunctis ita, ut margo

u ima-

u imaginis reflexæ congruat cum g, adducendus erit radius refractus TT' motu prismatis variabilis ad locum notatum imaginis directæ ita, ut T abeat in locum notatum pro H. Angulus prismatis variabilis b, qui ita reducet eum marginem ad locum naturalem, corriget utique refractionem individui coloris pertinentis ad illum marginem, & ope ipsius cum angulo a prismatis fixi, & valore M prismatis variabilis pertinentis ad illum colorem individuum, habebitur per formulam superiorem valor m respondens eidem individuo colori in substantia prismatis fixi. Determinatio evadet multo facilior, nimirum sine ullo usu divisionum in muro positionis perpendiculi accurati, ac mensuræ ipsius perpendiculi, & fiet calculo multo simpliciore. Ita poterunt haberi valores pro coloribus iisdem quotcumque, prius respectu substantiæ unius prismatis, tum respectu alterius; adeoque poterit haberi curva figuræ 21 pro iisdem ope hujus instrumenti multo facilius, quam per observationem ibidem expositam, & repetitam pro singulis prismatis.

142. Si seligantur bini colores extremi, & unus e mediis, habebuntur valores dm accurati respondentes medio collato cum extremis in utraque substantia, quod exhibebit elementa calculi pro objectivis constantibus e tribus substantiis, quæ conjungant omnes tres eos colores. Eodem modo pro objectivis adhibentibus binas substantias possent assumi bini extremi; sed valores pro his multo facilius obtinebuntur in paragrapho sequenti, ut monuimus.

143. Illud hic demum addemus tantummodo, si desit heliostata, posse utique, sed multo difficilius, institui observationes pro inveniendo valore b anguli prismatis variabilis destruentis refractionem radiorum mediorum: ad eam rem poterit observatio institui sequenti ratione. Exprimat in fig. 18 DD' non planum verticale heliostatæ, sed ipsum parietem, in quo habebitur imago CC' respondens toti diametro apparenti solis: adducatur latus verticale chartæ ad alterum extremum imaginis naturalis, ut C lævum respectu aspicientis murum: tum celeriter applicetur ante foramen AA' super tabella figuræ 14 instrumentum figuræ 9 habens prisma variabile, & fixum conjuncta, ut

in.

in fig. 22, & liberato cylindro TV figuræ 9 (Tab. II) a cochlea Y, adducatur crus instrumenti ferens frustum majus mobile prismatis variabilis ad positionem, in qua margo sinister spectri adveniat ad illud latus chartæ. In eo statu potest adstringi cochlea Y: tum retracto in latus instrumento, imago naturalis invenietur motu diurno solis progressa ita, ut jam non tangat illud latus verticale chartæ: promovebitur charta ita, ut non solum tangat illum eundem marginem imaginis naturalis, sed sit paullo promotior in eam plagam, in quam ipsa processerat: reposito citissime instrumento adducetur ope cochleæ X spectrum ad contactum lateris chartæ, & retracto iterum celerrime in latus instrumento, observabitur, an idem latus chartæ tangatur ab eodem latere imaginis, quæ tam exiguo tempore, quo instrumentum retrahitur, non potest habere progressum sensibilem. Si congruit; angulus prismatis indicatus ab angulo instrumenti imminuto per angulum parallelismi exhibebit angulum *b* prismatis variabilis, qui destruit refractionem coloris pertinentis ad illum marginem. Si margo imaginis naturalis non tetigerit accurate latus chartæ; iterum charta erit applicanda paullo ultra contactum, & renovanda observatio, donec spectro tangente id latus, & instrumento celeriter retracto, inveniatur margo imaginis naturalis in contactu. Idem autem præstabitur deinde respectu alterius marginis spectri.

144. Usus, & consideratio celeritatis, qua imago naturalis progreditur in directione horizontali, & temporis requisiti pro collocatione instrumenti ante foramen, cum appulsu imaginis reflexæ ad ipsum, & motu cochleæ X ad inducendum contactum spectri, efficient, ut saltem post duo, vel tria tentamina obtineatur contactus chartæ tam pro spectro, quam pro imagine naturali immediate succedente post remotionem celerem instrumenti in latus. Adhuc tamen satis apparet, quanto expeditior debeat esse observatio ope heliostatæ, qui imaginem naturalem retineat immotam, & qui tam facile paratur. Sine ipso requiritur attentatio multiplex, & socius, qui chartam promoveat in pariete, dum alter observator retrahit instrumentum, & remittit, ut nimirum

mirum observatio fiat celeriter. Pro hac observatione est omnino necessarium, ut instrumentum possit libere excurrere per tabellam figuræ 14, ad quam crus ferens frustum minus immotum apprimatur tantummodo digitis manus alterius, dum alterum crus ope cochleæ X promovetur. In casu heliostatæ, in quo imago naturalis remanet fixa, potest facile parari instrumentum, quod affigat ope cochleæ id latus ei tabellæ, dum alterum promovetur; quia, imagine naturali perpetuo tangente easdem lineas verticales, nulla habetur necessitas retrahendi instrumentum toto tempore observationum institutarum pro utroque margine. Verum id instrumentum redderet complicatiorem machinam, dum solis digitis admodum facile fit illa appressio lateris ad tabulam; præterquam quod si adhibeantur plura prismata habentia diversos angulos ad explorandas vires singularum substantiarum; oportebit semper novo motu inclinare illud idem latus instrumenti ad hoc, ut imago reflexa redeat ad foramen.

§. XIII.

Usus 4: determinatio virium distractivarum in aliis substantiis.

145. Si inversio fieret per conjunctionem simultaneam omnium colorum, quæ reddat albedinem, ut accidit num. 128, cum prisma fixum, & variabile sunt ex eadem materia; determinatio esset multo facilior, & magis accurata: notato angulo prismatis variabilis, qui tum corrigeret omnem distractionem, statim pateret, utra substantia habeat majorem vim distractivam: illa nimirum habet majorem vim, cujus angulus minor destruit effectum anguli majoris alterius. Si is angulus prismatis variabilis dicatur b, & angulus prismatis fixi a, ut in correctione refractionis; valor $\frac{dm}{dM}$, qui tum esset idem pro omnibus binariis colorum quorumcunque, haberetur per sequentes formulas, quarum fundamentum habetur itidem in illa veteri mea dissertatione secun-

cunda; sed hic applicabitur in supplemento primo demonstratio huic instrumento.

I $sin.x' = \frac{m}{M} \times sin.a$ II $\frac{dm}{dM} = \frac{m}{M} \times (tan.(b'-x')cot.x'+1)$.

146. Valor M habetur ex §. 9, & pertinet ad substantiam prismatis variabilis, valor m pro prismate fixo habetur ex §. 12: hinc obtinetur logarithmus fractionis $\frac{m}{M}$ adhibendus in utraque formula. Ejus ope per $sin.a$ habetur sinus valoris subsidiarii x', & ipse x', ac $b'-x'$, adeoque valor $tan.(b'-x')\ cot.x'$, qui additus unitati, vel inde ablatus, prout valor x' obvenerit minor, vel major, quam b', relinquet valorem multiplicandum per $\frac{m}{M}$ ad habendum valorem $\frac{dm}{dM}$. Calculus per logarithmos erit expeditissimus, quia secunda omitti poterunt, & numeri decimales, qui abeant ultra 4 notas; adeoque satis erunt tabulæ sinuum, & logarithmorum communes sine ullo usu partium proportionalium.

147. Sed successiva inversio spectri cogit adhibere æstimationem quandam, quæ tamen mihi exhibuit determinationem satis accuratam pro correctione distractionis colorum extremorum. Inversio successiva fieri potest duplici modo: primum ejus inversionis genus appellabimus inversionem directam, secundum obliquam. Habetur inversio directa tum, cum rectæ lineæ, quæ sunt in singulis prismatis intersectiones binorum planorum refringentium, sunt parallelæ inter se: obliqua habetur, cum illæ rectæ sunt nonnihil inclinatæ ad se invicem. Si prismatum bases, & facies sint accurate elaboratæ, nimirum plana accurate perpendicularia suis basibus; collocatis prismatis ita, uti exhibet figura 22, super eodem plano basium instrumenti, habebitur parallelismus earum rectarum, & inversio directa: secus haberi poterit inclinatio mutua earum rectarum, & inversio spectri obliqua: quando habetur directa, facile obtinebitur obliqua, supponendo vel cuneolum ligneum, vel chartam plicatam pluribus vicibus, vel modicum ceræ aut cuspidi D (fig. 22) pris-

matis fixi, aut basi EB: cerâ suppositâ utrique, potest inclinari ad libitum recta respondens puncto D in partem utramvis premendo caput alterum digito versus basim instrumenti. Eo pacto, etiam ubi habeatur in prismatum constructione exiguus defectus, adhuc obtineri poterit parallelismus earum rectarum, & inversio directa, cum transitu facili a positione inversionis directæ ad positionem obliquæ: utra earum positionum habeatur, docebunt ipsa inversionis phænomena, quæ jam persequemur. Interea addemus, facile fieri exiguum instrumentum e binis lamellis metallicis conjunctis ope axiculi ita, ut inclinari possit altera ad alteram per cochleam, quæ traducta per primam innitatur secundæ applicatæ basi instrumenti: axiculus collocaretur vel ex parte D, vel ex parte EB, & cochlea elevando, vel deprimendo caput oppositum inclinaret basim triangularem EDB impositam suæ lamellæ cum linea recta elevata supra ipsam in D.

148. Ipsa inversio directa potest fieri duplici modo, & utrique respondet sua obliqua ita, ut inter phænomena obliquarum discrimen sit exiguum, dum phænomena directarum sunt satis diversa: primum genus inversionis directæ dicemus id, quod incipit a margine coloris rubri, secundum id, quod incipit a margine violacei: in utroque series phænomenorum erit admodum distincta; si discrimen inter binas substantias eorum prismatum fuerit ingens. In primo genere ea series est magis distincta in initio inversionis, in secundo in fine. Licebit autem contemplari utramque iisdem prismatis variabili, & fixo, jam augendo angulum illius, jam minuendo. Si in motu spectri facto per augmentum ejus anguli habetur inversio directa secundi generis; in motu contrario facto per decrementum ipsius, habebitur inversio primi, & vice versa.

149. Considerentur in spectro 4 margines, dexter, sinister, superior, inferior. Ante, & post inversionem colores rubeus, & violaceus occupant margines dexterum, & sinistrum; sed singuli non pergunt occupare eundem marginem. Is, qui ante principium inversionis erat in margine dextero, post finem inversionis ipsius est in sinistro, & e contrario ille, qui ante fuerat in sinistro, post invenitur in dextero: en phænomena inversionis di-

directæ (*). Dum spectrum progreditur mutatione continua anguli variabilis; color rubeus attenuatur plurimum in suo margine, ac demum evanescit: succedit ibi aureus, tum flavus, & interea in margine opposito habetur semper violaceus: succedit in priore margine viridis, qui evadit admodum vividus, & purus; dum in margine opposito violaceus incipit degenerare in quendam, qui non est similis ulli primigenio, compositum e rubeo, & violaceo conjunctis, qui quidem est veluti vinaceus. Newtonus appellat purpureum eum, qui componitur ex illis extremis. Motu spectri ulteriore evanescit in illo priore margine color viridis, cui succedit cæruleus, tum indicus, ac demum violaceus; dum interea in margine opposito rubeus emergit jam manifestus, & liber ab omni mixtione. Sic absoluta inversione singuli margines oppositi dexter, & sinister habent colores oppositos iis, quos habebant ante, & motu spectri continuato perseverant semper extremorum positiones eædem, intermediis semper magis se explicantibus.

150. In inversione secundi generis incipit attenuari color violaceus in suo margine, ac demum evanescit, succedente ibi indico, tum cæruleo; dum adhuc habetur rubeus in margine opposito: succedit in priore margine cæruleo viridis, ac in opposito jam apparet vinaceus ortus ex conjunctione violacei cum rubeo: viridem in priore excipit flavus, tum aureus, ac demum rubeus, violaceo liberato ab omni mixtione. Discrimen inter ea duo genera consistit in eo, quod series colorum in priore habetur in eo margine, in quo ante inversionem habebatur rubeus; in posteriore ea series habetur in altero, in quo ante habebatur violaceus: postrema phænomena hujus sunt eadem, ac prima illius, & vice versa. In inversione obliqua res accidit multo aliter: arcus binorum colorum rubei, & violacei, qui occupabant marginem dexterum, & sinistrum, gyrant per peripheriam spectri ita, ut in-

L 2 media

(*) In meo vitrometro aqueo habentur in margine superiore; & inferiore ea omnia, quæ hic in dextero, & sinistro, ac vice versa.

media conversione occupent marginem superiorem, & inferiorem, ac demum peracta media conversione ille, qui fuerat in margine dextero, occupet sinistrum, & vice versa. Chordæ eorum arcuum ante, & post inversionem sunt verticales, in media inversione evadunt fere horizontales, nimirum æque nonnihil inclinatæ ad horizontem hinc, & inde: verum eæ chordæ non possunt determinari accurate, sed æstimatione quadam; nam extremus margo spectri est nonnihil confusus lumine ibi evanescente per gradus insensibiles, & in extremis suis arcubus color rubeus, & violaceus degenerant sensim in alios compositos. In media inversione, in qua rubeus, & violaceus occupant marginem superiorem, & inferiorem, habentur hinc viridis, inde vinaceus in binis marginibus dextero, & sinistro.

151. Positio rubei, & violacei in margine superiore, & inferiore pendet a positione plani EDB figuræ 22 (Tab. IV), quæ ad habendam inversionem obliquam, debet habere exiguam inclinationem. Si cuspis D est elevatior, quam basis EB; color rubeus occupat marginem superiorem: si illa est depressior; hic occupat inferiorem: viridis autem occupat eum e marginibus dextero, & sinistro, quem occuparet, si inversio fuisset directa. Porro inversio directa facile mutatur in obliquam, & obliqua in directam elevando, vel deprimendo vel cuspidem D, vel basim EB: in media inversione directa, si libeat, ejusmodi elevatione, vel depressione fit, ut enascantur colores rubeus, & violaceus in marginibus superiore, & inferiore, ac ut rubeus e superiore transeat in inferiorem, vel vice versa.

152. Inclinatio plani EDB debet esse exigua, non tamen ita exigua, ut colores rubeus, & violaceus in marginibus superiore, & inferiore non sint satis manifesti. Quo fuerit major ea inclinatio, eo magis explicabuntur ii colores: si ipsa augeatur ita, ut planum BDE evadat verticale, imponendo plano basis instrumenti basim prismatis quadrangularem illam, quæ respondet rectæ EB; tum habebitur illud, quod in experimentis Opticæ Newtonianæ appellant experimentum crucis, spectro evadente oblongo, & acquirente positionem mediam inter horizontalem, & vertica-

tica-

ticalem. Sed ad hunc nostrum hujusce instrumenti usum inclinatio debet esse, quantum fieri potest, exigua; dummodo colores rubeus, & violaceus in margine superiore, & inferiore evadant satis manifesti ad judicandum de horizontalitate chordarum, quæ subtendunt eorum arcus.

153. Jam vero ad inveniendum valorem fractionis $\frac{dm}{dM}$ pertinentis ad duo quæpiam determinata colorum genera, oporteret posse determinare in inversione spectri angulum b' prismatis variabilis, in quo ea conjunguntur. Omnia fila ejusdem coloris cujuscumque digressa a toto disco solis, & traducta per totum foramen machinulæ habentis speculum abeunt in pariete in circulum, vel in ovalem, quæ in hisce experimentis parum abludit a circulo, quam idcirco nominabimus itidem circulum. Et centra, & areæ totæ omnium ejusmodi circulorum pertinentium ad colores omnes congruunt in imagine naturali. In spectro colorato ante, & post inversionem centra quidem diffusa sunt, per quandam lineam ita, ut nullum congruat cum alio quopiam: circuli ob suam magnitudinem superponuntur parte sui eo majore, quo eorum centra propiora sunt, quam ob causam in spectro parum oblongo, efformato nimirum ab exigua refractione, omnes parte sui aliqua congruunt circa medium spectrum, & exhibent colorem album: in binis marginibus dextero, & sinistro remanent puri soli rubeus, & violaceus, quibus adjacent compositi e coloribus eo pluribus, quo magis receditur ab iis marginibus versus medium, plurium nimirum circulorum partibus sibi invicem superpositis. In motu spectri centrum coloris violacei movetur omnium celerrime, & centrum rubei lentissime: dum acceditur ad inversionem; linea centrorum minuitur, ipsis centris accedentibus ad se invicem. Ubi inversio fit per solum prisma variabile, vel per ipsum cum fixo ex eadem substantia; conjunguntur simul centra omnia, evanescente tota ipsorum linea, & fit inversio momentanea cum transitu per albedinem. At ubi substantiæ prismatum variabilis, & fixi sunt diversæ, incipit inversio directa per inflexionem lineæ centrorum replicatæ supra se ipsam ita, ut alterum ejus extremum,

quod

quod incipit superponi reliquo tractui, transcurrat per ipsum totum, & ita abeat ultra ipsum, ut etiam extremum alterum penitus evolutum remaneat liberum ab omni superpositione. In inversione obliqua deflectitur in latus linea centrorum ita, ut caput plicatum transcurrat prope reliquum tractum supra, vel infra ipsum sine ulla congruentia ullius partis ejus lineæ cum quapiam alia. Id in sequenti §. illustrabitur adjectis figuris idoneis.

154. Inde patet, in inversione obliqua nullam haberi superpositionem centrorum; sed in directa quodvis centrum coloris cujusvis debere congruere successive cum reliquis omnibus aliis post alia, & quidem habebitur congruentia numeri binariorum infiniti quovis momento temporis, quo inversio durat. Si possent discerni a se invicem ea centra; posset utique determinari angulus b', qui conjungit bina quævis determinata colorum genera: verum id quidem fieri non potest tum ob magnitudinem ipsam circulorum, quæ inducit mixtionem eorum quoque colorum, quorum centra disjuncta sunt, tum ob insensibilem gradationem, quia colores diversorum generum sibi invicem succedunt ita, ut transitus ab uno ad alium discerni non possit, nec color quicumque satis distingui a sibi proximis.

155. Conjunctio extremorum minorem difficultatem habere debet; sed habet adhuc satis magnam. Ea conjunctio habetur tum, cum in altero e marginibus dextero, & sinistro habetur color viridis vividissimus, & in altero vinaceus, in qua positione ipsa colores marginales spectri apparent maxime tenues. Verum color viridis, & vinaceus diu perstant, & mutato non ita parum angulo prismatis variabilis mutantur parum admodum: & quidem circa maximum, & minimum plerumque mutationes habentur ita exiguæ, ut momentum, in quo id accidit, determinari non possit sine periculo erroris non ita exigui. Eam ob causam inversioni directæ præferendam censeo obliquam, in qua centris transeuntibus nonnihil ad latus extant in arcubus superiore, & inferiore colores extremi rubeus, & violaceus, chordis ipsorum arcuum factis horizontalibus. Incertus eorum arcuum limes cogit ibi etiam adhibere æstimationem quandam; sed aspectus falcium

colo-

coloratarum, quæ habentur in iis marginibus, reddit minus difficile judicium de positione utriusque simili, fere horizontali, nimirum æque nonnihil inclinata ad horizontem. Facile paullatim acquiritur usus judicandi de positione earum falcium ita, ut determinationes repetitæ pluribus vicibus inclinando eos arcus jam hinc, jam inde per mutationem anguli prismatis variabilis, vix differant a se invicem duobus, vel tribus minutis: quamobrem cum possit observatio repeti pluribus vicibus; haberi potest assumendo medium determinatio satis accurata.

156. In ea positione spectri color rubeus occurrit colori violaceo, eorum distractione horizontali correcta ab angulo prismatis variabilis, quo angulo in formula II numeri 145 assumpto pro b', habebitur valor $\frac{dm}{dM}$ pertinens ad colores extremos. Si habeatur valor dM semel determinatus accurate pro substantia prismatis variabilis; eruetur inde valor absolutus dm, a quo pendet qualitas distractiva substantiæ prismatis fixi. Sed ad usus, ad quos adhibentur hæ observationes, satis est habere fractionem $\frac{dm}{dM}$. Pro objectivo composito ex binis substantiis, ut vitro communi, & flint, dicantur m, & m' rationes sinuum respondentes coloribus mediis in iis substantiis, dm, dm' differentiæ respondentes extremis. Formulæ pro radiis sphæricitatum continent solum valores m, m', $\frac{dm}{dm'}$, ut patebit inferius. Porro m, & m' invenientur ope hujus instrumenti ex §. 12. Ex hoc §. habebitur valor $\frac{dm}{dM}$ & $\frac{dm'}{dM}$ adhibitis singulis prismatis fixis ex singulis substantiis. Dividendo priorem valorem per valorem posterioris obtinebitur valor $\frac{dm}{dm'}$; ac proinde habebuntur omnia elementa necessaria ad calculos earum sphæricitatum.

§. XIV.

§. XIV.

Consideratio intimior inversionis successivæ cum pluribus ejus consectariis.

157. EA, quæ hic proponemus, habentur magna ex parte in secunda ex illis veteribus dissertationibus, sed aptata illi vitrometro aqueo: hic eadem aptabuntur huic prismati variabili vitreo, & explicabuntur multo uberius illustrata pluribus figuris. Ea, quæ diximus de centris circulorum coloratorum num. 153 pertinentia ad inversionem spectri directam, patebunt melius in figuris a 23 ad 29 (Tab. V): obliquam ponent ob oculos figuræ quinque sequentes: sed ad diminuendum numerum figurarum reducam colores primigenios ad 5 genera, habitis pro uno binis, qui parum admodum differunt a se invicem, uti sunt aureus, & flavus, ac cæruleus, & indicus. Expriment eæ figuræ casum, in quo inversio directa fiat incipiendo a colore rubeo existente ante inversionem in margine dextero, & spectro abeunte a læva ad dexteram. Posset inversio directa incipiens itidem a rubeo fieri etiam spectro abeunte ad lævam, & colore rubeo in utravis directione motus obtinente marginem dexterum: quæ hic dicentur de hoc casu, facile applicabuntur ad reliquos figuris rite aptatis.

158. Centra circulorum pertinentium ad radios violaceos, cæruleos, virides, aureos, rubeos, sint ante inversionem spectri diffusa per segmenta cujusdam rectæ in fig. 23 AB, BC, CD, DE, EF. Paullo post inversionem, priora quatuor erunt diffusa in fig. 24 per AB, BC, CD, DE, sine ulla superpositione, sed linea rubeorum replicata supra se ipsam erit $Ee + eF$. Quodvis centrum partis Ee congruet cum aliquo centro partis eF: adhuc tamen in margine dextero spectri habebitur semper centrum quoddam rubei e, ut ante inversionem habebatur in fig. 23 centrum F: id accidet, donec tota recta rubei EF ejusdem figuræ plicetur abiens in ED: deinde incipient remanere in margine dextero

pun-

puncta rectæ DE, quæ continent centra coloris aurei, donec & ipsa DE plicetur tota, abeunte toto tractu DEF in DCB: circa medium ejus motus habebitur figura 25, in qua centra violaceorum, & cæruleorum remanent adhuc libera in AB, BC: sed viridia CD jam congruunt cum rubeis EF, & flavorum pars D*d* cum parte reliqua *d*E, extante quodam flavo in *d*. Plicata etiam parte lineæ viridium, succedit fig. 26, in qua congruit AB violaceorum cum EF rubeorum: tum BC cæruleorum cum DE aureorum: ac demum parte viridium C*c* cum reliqua *c*D ipsorum viridium. In fig. 27 jam rubei, & aurei sunt liberi in EF, DE, virides CD congruunt cum violaceis AB, & cæruleorum pars B*b* cum reliqua *b*C. In figura 28 sunt liberi omnes in EF, DE, CD, BC præter partes violaceorum A*a*, *a*B, quæ superponuntur; donec in fig. 29 absoluta inversione totâ remaneant libera ab omni superpositione omnia centra rubeorum in EF, aureorum in DE, viridium in CD, cæruleorum in BC, violaceorum in AB.

159. In hisce figuris nulla habita est ratio discriminis inter amplitudines segmentorum rectæ centrorum, pertinentium ad centra diversorum colorum, quæ quidem nec servant inter se rationem eandem, ut deducemus ex hac ipsa successiva unione colorum. Ex ea inæqualitate fit, ut congruente puncto E cum D in fig. 25, F non congruat accurate cum C, & sic in reliquis figuris congruente initio unius segmenti cum fine cujuspiam alterius, reliqua initia, & fines non congruant: quin immo ea ipsa initia, & fines sunt maxime incerta; cum ab uno colore ad alium transeatur per gradus discriminum admodum insensibiles. Verum eæ figuræ ita, ut sunt delineatæ, abunde sunt ad ingerendam animo ideam inversionis successivæ spectri, quæ fit per congruentiam centrorum aliorum post alia talem, ut quodvis centrum congruat cum alio quovis, & infinita binaria simul congruant.

160. Pariter ex hoc exemplo patet facile, quid accidat, cum inversio incipit e contrario ab extremo violaceo; & patet, semper haberi posse utrumque genus inversionis in itu, & reditu. Facta inversione primi generis in progressu spectri a fig. 23 ad 29, redeundo a 29 ad 23 habebitur motu retrogrado series phæ-

nomenorum eadem, sed inversa ita, ut evadant postrema, quæ fuerant prima, & vice versa. Extabit in eodem margine dextero figuræ 28 violaceus in *a*, tum cæruleus in *b* fig. 27, deinde viridis in *c* fig. 26, facto jam vinaceo in A: deinde vero aureus in *d* fig. 25, rubeus in *e*, & F fig. 24, & 23, ipso rubeo jam prorsus libero in tribus postremis in A. Eundo, & redeundo habetur semper utrumque genus. Quod si omnes hæ figuræ invertantur tanquam impressæ ex hoc veluti typo super alia charta; successio colorum, quæ habebatur in margine dextero, habebitur in sinistro; & dum inversio primi generis habetur in motu versus dexteram, inversio secundi in motu versus sinistram, prima habebitur in hoc secundo, secunda in illo primo.

161. Instrumento ita parato, ut exhibet figura 9 (Tab. II), & 22 (Tab. IV), spectrum coloratum inductum a solo prismate fixo in casu parallelismi abit ad partem dexteram aspicientis murum, quem dicemus locum spectri primum, & aperto magis instrumento, motus spectri fit versus lævam, in quo color rubeus ante inversionem remanet ex parte sinistra, & præit, violaceus e dextera, & consequitur. Existente variabili e flint, & fixo e vitro communi, inversio fit ante appulsum ad locum naturalem, & in progressu ad lævam: si autem variabile sit e vitro communi, & fixum e flint; inversio fit post appulsum ad locum naturalem, & in primo casu in eo progressu a loco naturali incipit inversio a superpositione violacei, in secundo a superpositione rubei. Ubi pari refractione binæ prismatum substantiæ inducunt distractiones parum diversas prismatis variabilis, & fixi, licet vires earum refractivæ differant plurimum, inversio fit prope locum naturalem imaginis directæ, & aliquando incipit ante appulsum ad locum naturalem, desinit post ipsum, existente ejusmodi vi distractiva alterius majore respectu quorundam colorum, & alterius respectu reliquorum.

162. In meo priore vitrometro, in quo prisma variabile est ex aqua, fixum e vitro, longitudines prismatum, nimirum rectæ, quæ jungunt binas facies refringentes singulorum, sunt horizontales, & angulus faciei triangularis prismatis fixi tendit sursum.

sum. Hinc locus primus spectri efformati a solo fixo, vel a refractione fixi prævalente, est infra locum naturalem, colore rubeo occupante marginem superiorem, violaceo inferiorem: crescente angulo prismatis aquei spectrum ascendit. Quotiescumque adhibui fixum e flint, vel strass, obtinui semper inversionem post appulsum ad locum naturalem supra ipsum: adhibitis pro fixo plurimis generibus vitrorum communium, inveni inversionem in loco naturali ita, ut inciperet infra, & desineret supra: adhibita crystallo montana inveni ipsam inversionem infra locum naturalem ante appulsum ad ipsum; unde mihi constitit, pari refractione aquam distrahere radios minus quam flint, & strass, fere æque ac vitrum commune, magis quam eam crystallum. In omnibus autem iis substantiis prismatis fixi inveni in ascensu inversionem primi generis incipientem nimirum a rubeo successione colorum facta in margine superiore, ex quo phænomeno quid consequatur, patebit inferius.

163. Fusius immoratus sum in evolvendis hisce casibus; ut ex hisce pluribus exemplis constaret melius indoles hujusce inversionis, quæ est summi momenti ad cognoscendas intimius naturam, & proprietates luminis: combinationes plurimæ possent occurrere pro diversa natura substantiarum prismatum variabilis, & fixi, tum ex diversa collocatione frustorum variabilis in instrumento, ex qua potest oriri motus spectri ortus ex incremento anguli variabilis versus dexteram, vel versus lævam: ac demum ex diversa prismatis fixi, ex qua potest ille, quem diximus locum primum, jacere vel ex parte dextera respectu loci naturalis, vel ex parte sinistra, ac inversio fieri vel ante locum naturalem, vel in ipso, vel post. Hinc si series phænomenorum accidat aliter, quam in superioribus exemplis; discrimen, quod occurret, non turbabit observatorem, nec nocebit summæ rei. Occurret semper una ex octo combinationibus trium terminorum, quorum singuli pertineant ad sequentia tria binaria: ut motus a loco primo fiat versus partem dexteram aspicientis, vel versus sinistram: ut inversio fiat in margine præcedente, vel in consequente: ut incipiat ex parte rubei, vel ex parte.

te violacei : iis potest addi aliud ternarium , ut fiat ante appulsum ad locum naturalem , vel circa ipsum , vel post ipsum , quod illas octo combinationes reducit ad 24 . Sed illud commodum accidit , quod semper iisdem prismatis variabili , & fixo eodem modo collocatis habetur inversio tam incipiens ab extremo rubeo , quam a violaceo , cum successione colorum ex parte altera ; nisi prisma fixum habeat angulum majorem , quam ferat angulus maximus eorum , quos potest acquirere prisma variabile.

164. Si is angulus sit nimis magnus ; fieri potest , ut angulus variabilis adveniat ad maximum eorum , quos habere potest , antequam incipiat inversio spectri , quo casu adhibendum esset adjumentum prismatis IKL figuræ 5 ex eadem substantia . Si prisma variabile est ex aqua , ut in veteri illo vitrometro ; requiritur tam ad correctionem refractionis , quam ad correctionem distractionis angulus aquæ multo major , quam vitri ; sed in ipso , ubi etiam facies instrumenti continentis aquam sunt parallelæ , immisso in ipsam prismate fixo e vitro , statim exoritur angulus aquæ æqualis angulo prismatis vitrei : illo aucto per motum instrumenti obtinetur correctio refractionis per angulum hujus minorem angulo prismatis vitrei . Potest autem efformari vitrometrum ex aqua , quod spectrum moveat horizontaliter , & majoris anguli sit capax , quam sit illud , quod protuli in illa prima dissertatione , & habebitur hic in supplemento II (*) . Si prisma variabile sit e vitro , ut in instrumento , de quo agimus in hoc Opusculo ; angulus variabilis , qui destruat refractionem fixi , parum differt ab eodem , existente exigua differentia vis refractivæ diversorum vitrorum : sed ad destruendam distractionem , si prisma variabile est e vitro communi , requiritur ejus angulus major ad de-

(*) Curaveram id perfici in Gallia , sed negligentia artificis ipsum reliquit imperfectum . Paullo ante impressionem hujusce Operis accepi minus male elaboratum , quod usui esse potest . Id itidem habebitur hic in supplemento III . Porro ejus ope observationes institui possunt prorsus eodem modo , ac ope instrumenti habentis prisma variabile vitreum , de quo agitur in hoc Opusculo .

destruendam refractionem prismatis fixi e strass, & flint, & multo major ad destruendam distractionem utriusque : vice versa si prisma variabile sit e flint, vel strass; sufficit ejus angulus minor ad destruendam distractionem vitri communis. Id reddit magis opportunum variabile e flint, vel strass; cum ad obtinendas inversiones spectri sufficiat in eo casu arcus minor superficiei sphæricæ frusti longioris : verum ex altera parte vitrum commune est magis opportunum pro prismate variabili idcirco, quod habetur major mutatio in ejus angulo ab initio ad finem inversionis, quod reddit ipsam, & ejus figuras magis sensibiles. Eadem major mutatio in angulo obtineri potest pro inversione facta per flint variabile, adhibendo prisma fixum commune anguli aliquanto majoris, quam sit maximus eorum, quos habere potest variabile : sed tum eodem variabili obtineri non potest destructio refractionis prismatis fixi, nisi adhibeatur adjumentum figuræ 5.

165. Quoniam & vis refractiva aquæ est multo minor, quam vis refractiva vitrorum, & ejus natura a natura vitri est magis diversa, quam natura vitri unius a natura alterius, saltem in ordine ad plura phænomena; variabile ex aqua est multo magis idoneum ad bene perspicienda phænomena inversionis successivæ directæ, & notandos angulos successionis colorum, licet ad alios usus hoc novum instrumentum cum variabili vitreo sit magis commodum : eam ob causam proponam hic in supplemento IV observationes institutas ope illius, quas edidi in illa secunda dissertatione. Uberiorem seriem omnium observationum, quæ institui possunt tam ope prismatis variabilis vitrei applicati huic instrumento novo, quam ope aquei ejus formæ, quam indicavi numero superiore, exhibebo alibi : sed interea hic progrediar ad evolutionem lineæ centrorum in conversione obliqua.

166. Figuris 24, 25, 26, 27, 28 in ea inversione succedunt 30, 31, 32, 33, 34. Remanet in hac inversione supra lineam centrorum quæ habebatur ante inversionem in figura 30 pars *e*F, in 31 pars *d*EF, in 32 pars *c*DEF, in 33 pars *b*CDEF, in 34 pars *a*BCDEF. Evolvitur ipsa linea centrorum, sed ita, ut caput, quod evolvi incipit, transeat supra positionem partis non-
dum

dum evolutæ. Id accidit, quia juxta numerum 147 in figura 22 (Tab. IV) cuspis D est magis elevata quam BE: transiret infra, si ea esset magis depressa. Refractione prismatis fixi, quæ fit ad partes contrarias cuspidis, spectrum, si ea sit elevata, deprimitur; si sit depressa, elevatur: cumque refractio coloris violacei facta a singulis substantiis sit major, quam refractio coloris rubei; magis deprimitur in primo casu, magis elevatur in secundo color violaceus, quam rubeus, adeoque centrum rubei transit in illo supra, in hoc infra centrum violacei.

167. Ad sistenda oculis phænomena, quæ debent provenire ab ejusmodi inversionibus, non est satis habere ob oculos positiones varias centrorum: oporteret videre simul circulos omnes, cum variis distantiis centrorum multo minoribus semidiametro, & eo propiorum, quo magis acceditur ad inversionem, ac varia eorum positione, quæ singula persequi infinitum esset. Attingam pauca admodum, considerando phænomena, quæ haberentur; si circuli colorati essent tantummodo tres, rubeus, viridis, & violaceus, unde licet æstimare, quid debeat accidere seriei continuæ omnium.

168. Sint (figura 35 Tab. VI) A, B, C centra circulorum GDEG'E'D' violacei, HDFH'F'D' viridis, IEFI'F'E' rubei ante inversionem, existentibus intersectionibus primi cum secundo in D, D', primi cum tertio in E, E', secundi cum tertio in F, F'. Lunula anterior dextera FH'F'I' habebit solum colorem rubeum, lunula posterior læva DGD'H habebit solum colorem violaceum, triangula DEF, D'E'F' solum viridem; spatium EIE'G' omnes tres colores: reliqua quadrilinea sunt EFH'F'E'G', quod habebit rubeum mixtum cum viridi, & EDHD'E'I, quod habebit violaceum mixtum cum eodem viridi. Inde facile concipitur, cur etiam cum habentur colores omnes, limbus anterior sit rubeus, posterior violaceus, color sit albus in medio, rubeo adjaceant priores, violaceo postremi commixti eo plures, quo magis receditur a limbo: in margine summo, & imo debeat extare viridis purus in medio cum serie omnium adjacentium pura: & quidem ibi in spectro simplici parum etiam oblongo apparent colores minus commixti, sed ob paucitatem circulorum ejusdem coloris super-

perpositorum in nimia vicinia a margine, apparent tenues, & sensim evanescentes, quæ attenuatio facta per gradus insensibiles reddit semper minus distinctos etiam margines anteriorem, & posteriorem.

169. In inversione momentanea, quæ fit per eandem substantiam, succedit figura *36*, in qua omnia centra sunt conjuncta in B, tum figura 38, in qua post inversionem lunula anterior DH'D'G' habet colorem violaceum solum, lunula posterior FIF'H, solum rubeum, spatium intermedium EGE'I' mixtionem omnium, triangula FED, F'E'D' solum viridem, reliqua quadrilinea mixtionem binorum. Figura evadit similis priori 35, sed ejus inversa. In inversione successiva directa succedunt uniones aliorum centrorum post alia. In media ea inversione loco unionis omnium colorum figuræ *36* habetur figura 37, in qua centrum rubei C conjungitur post alia cum centro violacei A, extante adhuc ad dexteram centro viridis B. Tum omnes tres intersectiones coeunt in unicam E: lunula anterior EH'E'I'G' habet colorem viridem solum, posterior EGIE'H colorem violaceum commixtum cum rubeo, & in medio in EHE'I'G' habetur albedo. Hinc patet, cur in media ejusmodi inversione limbus anterior habeat colorem viridem, posterior vinaceum cum albedine in medio. Verum tenuitas in margine, & mixtio circulorum interiorum efficiunt, ut ne tum quidem color hinc rubeus, inde violaceus occupent totum marginem, sed in superiore circa E, & inferiore circa E' occurrant plures mixtiones. Facile itidem constat, quo pacto in margine dextero extent alii post alios colores puri cum adjacentium commixtione, in sinistro variæ mixtiones, donec rubeus post unionem cum violaceo evolvatur, & remaneat liber; dum interea semper habetur in medio color albus ex mixtione omnium facta a magnitudine circulorum.

170. Figuræ 39, 40, 41 exhibent positionem trium colorum in inversione obliqua. In fig. 39 centrum rubei C jam ascendit oblique supra centrum A violacei, sed ita, ut adhuc remaneat ad dexteram, centro viridis posito non prorsus in medio in *b*, sed nonnihil ad dexteram in B. In fig. 40 punctum C advenit jam

ad

ad positionem imminentem A, extante adhuc nonnihil B ad dexteram: in figura 41 centrum C remanet ad lævam ipsius A, centro B jacente nonnihil ad dexteram respectu puncti *b* intermedii. Succedit figura 39 figuræ 35, & figuræ 38 figura 41. In fig. 39 color rubeus ascendit oblique in EI'F'H'D, & violaceus descendit in EGD'HF, existente viridi in E'D'F', vinaceo in EDF, & albo in medio: in fig. 40 rubeus in priore quadrilineo, violaceus in posteriore inclinantur æque ad horizontem: in fig. 41 jam rubeus descendit, violaceus ascendit, donec absoluta inversione acquirant in figura 38 positionem contrariam ei, quam habebant in figura 35.

171. Inclinatio rubei, & violacei in media conversione in fig. 40 erit exigua, quia ob distantiam exiguam punctorum B, *b*, arcus F'D' est exiguus, ut etiam circa E mixtio circulorum interiorum exhibet colores ita incertos, ut rubeus, & violaceus in margine superiore, & inferiore non appareant satis manifesti, nisi per arcus quosdam multo minores semicirculis, quorum tamen chordæ terminatæ ad colorem hinc, & inde similem parum inclinatæ, ac fere horizontales determinant satis proxime judicium de concursu colorum extremorum distractione ipsorum, quæ inducitur a prismate fixo, correcta a variabili.

172. Magnitudo circulorum potest imminui plurimum adhibita lente majore in quadam distantia a foramine, per quod radii transeunt, & a plano, in quo recipitur spectrum: eo pacto permixtio colorum inde proveniens evitari potest maxima ex parte: & quidem Newtonus usus est ejus applicatione cum maximo successu: sed ea applicatio est admodum incommoda potissimum hic, ubi altitudo prismatis variabilis, & fixi est exigua: incommodum autem augetur ex motu spectri per parietem, in quo mutatur distantia a lente ipsa: mutatione distantiæ fit, ut circuli augeantur, nisi spectrum excipiatur in plano mobili, quod semper conservetur in illa eadem distantia a lente, in qua colliguntur ab ipsa radii divergentes a foramine: quod autem pertinet ad observandam correctionem refractionis, & distractionis, res satis bene perficitur etiam sine usu lentis. Si pro inversione

ad-

adhibeatur loco imaginis integræ imago transmissa per heliostatam; permixtio colorum orta ab ea ipsa magnitudine circulorum minuitur itidem plurimum, cum circuli transmissi per secundum foramen sint multo minores: adhuc tamen semper multo magis ad eam rem opportuna mihi apparuit imago integra transmissa per solum foramen primum, in qua vis luminis est multo major, & respectu cujus inæqualitates inductæ a materia prismatum minus perfecta sunt multo minus sensibiles. Successio colorum in margine extremo ejus imaginis satis evidenter se prodit in inversione directa, cum ibi evadant puri alii post alios singuli: in inversione vero obliqua satis manifesti fiunt colores extremi in marginibus superiore, & inferiore.

173. Quod pertinet ad colores intermedios puros in eo margine, in quo habetur successio in inversione directa; ii habentur puri eo solo pacto. In spectro communi habetur purus tantummodo primus rubeus, & postremus violaceus in ipso margine extremo, sed admodum tenues: in omnibus punctis intermediis habetur commixtio major, vel minor, prout magis, vel minus receditur a margine: ea minuitur ab heliostata, & magis a debita applicatione lentis, ac potissimum adhibito angulo refringente satis magno, & substantia satis refringente: sed saltem in quovis radiolo transmisso per foramen secundum, quod excipiat spectri particulam, semper habentur commixti plures radii ejusdem nominis, sed refrangibilitatis, & gradus coloris non prorsus ejusdem, ut plures virides, plures flavi. In inversione successiva adveniunt satis vividi alii post alios singuli colores primigenii prorsus puri, & simplices ita, ut is viridis, qui extat in eo margine, non sit commixtus cum ullo alio, ne viridi quidem ipsi proximo; atque is etiam est adhuc usus non inutilis hujus instrumenti, & inversionis successivæ inductæ ab ipso; ut nimirum possint poni ob oculos gradus omnes colorum omnium puri prorsus, ac simplices alii post alios.

174. In superioribus omnibus adhibuimus viridem tanquam colorem refrangibilitatis mediæ, & positum in medio spectro communi simplici. Is quidem non est medius respectu totius spectri inclusa tota serie violaceorum omnium sensim evanescentium, quæ

habet ingentem amplitudinem : at si considerentur soli radii violacei vividiores, omissis tenuissimis, qui vix sub sensum cadunt, & sæpe ne vix quidem ; medium occupatur a quodam gradu coloris viridis, & quidem in aliis substantiis alio ; cum, ut innuimus supra, & videbimus inferius, divisio colorum in spectro obveniat alia ex aliis substantiis. Hinc & in sequentibus adhibebimus viridem pro medio.

175. In inversione spectri facta ope hujus instrumenti accidit phænomenum, quod prima fronte videtur evertere præcipuum fundamentum theoriæ Newtonianæ luminis, & colorum, nimirum constantem refrangibilitatem quorundam colorum majorem refrangibilitate aliorum, ut refrangibilitatem violacei constanter majorem refrangibilitate rubei. Dum spectrum progreditur a loco primo, in quo erat tum, cum prisma variabile habebat parallelismum ; inversio fit ante appulsum ad locum naturalem, vel post ; prout majore, vel minore vi distractiva pollet substantia prismatis variabilis, quam fixi, ut supra monuimus. In primo casu post inversionem color violaceus, qui magis distabat a loco naturali, quam rubeus, jam incipit distare minus : & in secundo post transitum per locum naturalem, remanente adhuc ante inversionem colore violaceo in eodem margine, is margo, qui initio distabat magis a loco naturali, quam margo ipsi oppositus, jam incipit distare ab ipso minus ; adeoque tum color violaceus incipit distare minus a loco naturali, quam rubeus. Quamobrem semper in omnibus positionibus spectri inter locum naturalem, & locum inversionis color violaceus ab actione conjuncta binorum prismatum accipit refractionem minorem, quam rubeus ; dum in omnibus aliis positionibus spectri ipsius violaceus refringitur magis, quam rubeus.

176. At id quidem nihil obest ei theoriæ. In singulis substantiis pari angulo refringente, & inclinatione incidentiæ radii violacei refringuntur magis, quam rubei ; sed combinatio binarum substantiarum, quarum altera pari refractione inducit distractionem majorem, altera minorem, id efficit, ut correcta alterius distractione per alteram ante, vel post correctam refractionem, dif-

differentia binarum refractionum violacei sit minor, quam differentia binarum rubei; licet singulæ illius sint minores singulis hujus. Id illustrabimus exemplo numerico: sed prius præmittenda sunt nonnulla, quæ magna ex parte innuimus etiam initio hujusce Opusculi. Anguli, quibus radii binorum colorum simul advenientium ad prisma habens angulum exiguum detorquentur per refractionem, sunt ad se invicem non quidem accurate, sed tamen satis proxime in ratione quadam constanti, quæ in aliis substantiis est alia. Newtonus invenerat, in quibusdam vitris rationem valoris $m-1$ pertinentis ad primos radios rubeos ad valorem $m-1$ pertinentem ad postremos violaceos esse ut 27 ad 28, & credebat eam rationem esse communem omnibus substantiis. Refractio prismatis habentis angulum exiguum $= a$ est proxime $(m-1)a$, quod facile deduci potest etiam ex ea theoria prismatum, quam ponemus in supplementis hujus Opusculi: hinc refractio rubei ad refractionem violacei in ejusmodi prismatis esset proxime ut 27 ad 28, & differentia esset $\frac{1}{27}$ refractionis rubei, quæ cum sit parum diversa ab $\frac{1}{30}$, consequeretur, pro quovis gradu refractionis rubei haberi circiter duo minuta differentiæ, nimirum distractionis violacei a rubeo.

177. Dollondus invenit, eam rationem in aliis substantiis esse aliam: in vitris, quæ habent majorem quantitatem plumbi, differentia est major: in vitro flint distrahitur color violaceus postremus a primo rubeo circiter per tria minuta pro quovis gradu refractionis, in vitro strass per 4. Hoc discrimen in distractione diversa in diversis substantiis pari etiam refractione ab iis inducta præbuit Dollondo occasionem construendi ea telescopia dioptrica, quæ appellantur acromatica: inde enim fit, ut possit corrigi distractio, refractione non correcta, cujus correctio impediret formationem imaginis objecti. Id ipsum discrimen efficit, ut possit distractio esse plusquam correcta, nondum correctâ refractione, vel vice versa; unde fit, ut differentia binarum refractionum violacei sit minor, quam differentia binarum rubei; licet singulæ illius sint majores singulis hujus, quod phænomenum hic explicandum suscepimus exemplo numerico.

 178. Sit

178. Sit angulus e vitro communi graduum 12, angulus contrarius e flint graduum 8. Refractiones rubei, & violacei in primo erunt 6°, & $6^\circ. 12'$, in secundo 5°, & $5^\circ. 15'$. Quare si ea prismata agant in partes contrarias; refractio rubei in eam plagam, in quam agit primum, erit $6^\circ - 5^\circ = 1^\circ$, & refractio violacei $6^\circ. 12' - 5^\circ. 15' = 0. 57'$. Hic secundus effectus evadit minor, licet tam valor $6^\circ. 12'$ superet 6°, quam $5^\circ. 15'$ superet 5°. Effectus singulorum prismatum in radium violaceum est major, quam in rubeum; sed summa alterius sumpti positive, alterius negative, nimirum differentia effectuum, quæ efficit effectum conjunctum, est minor relate ad radium violaceum, quam relate ad rubeum. Prisma ex flint agens in partem contrariam ei, in quam agit prisma e vitro communi, plusquam corrigit distractionem ipsius; cum ejus distractio $15'$ superet illius distractionem $12'$; licet ejus refractio 5° non corrigat illius refractionem 6°. Si illud prius e vitro communi fuisset prisma fixum, & posterius e flint variabile; hoc secundum jam correxisset in eo suo angulo distractionem illius prioris, & nondum correxisset illius refractionem. Quod si variabile fuisset illud commune, & fixum hoc e flint; illud per suam refractionem $= 6^\circ$ jam plusquam correxisset hujus refractionem 5°, sed per suam distractionem $12'$ nondum correxisset hujus distractionem $15'$.

179. Licet tamen ea inæqualitas differentiæ refractionis pari refractione media, vel refractione alterius extremi non evertat summam theoriæ colorum Newtonianæ; adhuc tamen ponit ob oculos errorem Newtoni ipsius, vi cujus desperandum censuerat de ulteriori perfectione telescopiorum dioptricorum. Censuit, spectro redeunte ad locum imaginis naturalis nullam haberi posse separationem colorum, haberi autem semper, ubi id abit extra eum locum. Dum agentibus simul in partes oppositas flint, & vitro communi in hoc instrumento, spectrum devenit ad locum naturalem, apparent colores satis ampli. Ubi prismate fixo præbente refractionem rubei 6°, violacei $6^\circ. 12'$, prisma variabile præbet pro rubeo 6°, præbebit pro violaceo $6^\circ. 18'$. Quare refractio rubei erit $6^\circ - 6^\circ = 0$, refractio violacei

$6^\circ. +$

$6^\circ + 12' - (6^\circ + 18') = -6'$. Habebuntur in loco naturali sex minuta distractionis.

179. Defectum colorum in loco naturali Newtonus deduxerat ex eo, quod $\frac{dm}{m-1}$ esset, ut credebat, in omnibus substantiis idem valor constans, nimirum $\frac{1}{27}$, existente m valore pro rubeis, dm differentia valorum pro rubeis, & violaceis, & inde deduxerat, errorem diversæ refrangibilitatis corrigi non posse in telescopiis dioptricis. Bini ibi occurrunt errores, alter, ut ita dicam, juris mathematici, alter facti physici. Primum deprehendit Klingestierna, qui ante Dollondianum compertum ostendit, ipsam deductionem Newtoni esse erroneam; demonstravit enim, posse per duos prismatum angulos destrui refractionem alterius extremi, relicta aliqua refractione pro altero, & itidem posse induci refractionem pro utroque æqualem: sed ad eam rem requirebantur anguli majores: in angulis exiguis id obtineri non poterat; unde intulit, inde nihil adjumenti obtineri posse pro perfectione telescopiorum dioptricorum, in quibus exiguæ inclinationes superficierum sphæricarum æquivalent prismatis habentibus angulos exiguos. Adhuc tamen monuit, in ea omnia inquirendum esse iterum per observationes, quod Dollondum patrem impulit ad nova tentamina: ea præbuerunt discrimen adeo magnum in ipso valore $\frac{dm}{m-1}$ respondente vitro flint a valore respondente vitro communi; unde is deduxit theoriam, & constructionem telescopii dioptrici usque adeo perfectioris iis omnibus, quæ antea habebantur, & unde innotuit secundus Newtoni error, qui id, quod observationes exhibuerant, & quidem non penitus accurate, in quibusdam substantiis, traduxerat generaliter ad omnes alias (*).

180. Quæ proposuimus notatu digna in motu spectri inducto a mu-

(*) Eulerus de Newtoniana lege dubium injecit primus, cui aliam substituit innixus soli cuidam formularum algebraicarum analogiæ. Dollondus suo comperto eruto ex observationibus demonstravit falsam ipsam etiam Eulerianam.

mutatione anguli prismatis variabilis, pertinent quidem ad usum hujusce instrumenti, quod ea melius sistit oculis; sed non pertinent ad inversionem successivam ipsius spectri: haberentur ea omnia etiam, si haberetur inversio momentanea extra locum naturalem. Sed inversio successiva demonstrat falsam relationem colorum cum sono propositam a Newtono, quem tertium ejus errorem ego ex ipsa deduxi in secunda ex illis meis veteribus dissertationibus. Is error facti constabit generalius in supplementis eadem methodo, quam ibi jam tum adhibui; sed idem patebit hic etiam ope alterius exempli numerici, quod exhibebit originem ipsam successionis colorum in eo genere inversionis.

181. Sit in quodam vitro communi pro quovis gradu refractionis rubei differentia a viridi unius minuti, a violaceo $2'$, & in quodam flint illa $1'\frac{1}{2}$, hæc $3'$. Si refractio rubei ex priore sit 6°; erit refractio viridis $6^\circ.6'$, violacei $6^\circ.12'$: & si refractio contraria violacei ex secundo sit 4°; erit refractio viridis $4^\circ.6'$, violacei $4^\circ.12'$. Quare refractio ex utroque conjuncto pro rubeo $6^\circ - 4^\circ = 2^\circ$. pro viridi $6^\circ.6' - 4^\circ.6' = 2^\circ$, pro violaceo $6^\circ.12' - 4^\circ.12' = 2^\circ$. Nimirum in eo casu, in quo distractio viridis a rubeo ad distractionem violacei ab eodem rubeo habet rationem eandem 1 ad 2 in utroque vitro, refractio eorum trium colorum ab actione conjuncta binorum prismatum est æqualis in omnibus iis coloribus: correcta distractione mutua extremorum corrigeretur eorum distractio a medio: conjungerentur simul omnes tres, & respectu ipsorum inversio spectri non esset successiva, sed momentanea.

182. Sed si manentibus cæteris differentia a viridi in flint esset ut prius $3'$ pro quovis gradu refractionis rubei, sed in vitro communi esset non $1'$, sed $1'.\frac{1}{4}$; refractiones pro iis tribus coloribus essent ex flint $4^\circ : 4^\circ.6' : 4^\circ.12'$, ut prius, sed ex vitro communi $6^\circ : 6^\circ.7'.\frac{1}{2} : 6^\circ.12'$. Quare refractio ex utroque vitro conjuncto pro rubeo, & violaceo esset $6^\circ - 4^\circ = 2^\circ$, & $6^\circ.12' - 4^\circ.12' = 2^\circ$; sed pro viridi esset $6^\circ.7'\frac{1}{2} - 4^\circ.6' = 2^\circ.1'\frac{1}{2}$. Remaneret adhuc refractio viridis major reliquis binis; dum illæ jam essent æquales inter se. Esset jam correcta distractio violacei a

rubeo,

rubeo, & nondum correcta esset distractio viridis: conjunctis jam violaceo, & rubeo, ut in fig. 40, viridis extaret adhuc nonnihil ad latus, & inversio spectri esset successiva.

183. Ea patebunt melius unico aspectu in tabella sequenti, in qua prima columna exhibet titulos pro sequentibus: sequentes tres habent refractiones pro casu, in quo differentiæ refractionum habeant proportionem eandem in utraque substantia: tres postremæ easdem pro casu, in quo ea ratio sit diversa.

Refractio	Rubei	Viridis	Violacei	Rubei	Viridis	Violacei
a prismate fixo	+ 6°. 0'	+ 6°. 6'	+ 6 . 12	+ 6°. 0'	+ 6°. 7' $\frac{1}{2}$	+ 6°. 12'
a variabili	— 4 . 0	— 4 . 6	— 4 . 12	— 4 . 0	— 4 . 6	— 4 . 12
ab utroque simul	+ 2 . 0	+ 2 . 0	+ 2 . 0	+ 2 . 0	+ 2 . 1 $\frac{1}{2}$	+ 2 . 0

184. Quæ dicta sunt de hisce tribus coloribus, habent locum in reliquis omnibus. Si differentiæ pertinentes ad unum quemcumque collatum cum reliquis binis haberent ad se invicem rationem eandem in utroque prismate; correcta distractione unius binarii, corrigeretur simul etiam distractio alterius: & si ea ratio pro omnibus binariis esset eadem; haberetur unio colorum omnium, & inversio spectri esset momentanea, non successiva. Successiva requirit inæqualitatem rationis mutuæ differentiarum: hinc cum observatio facta per angulum variabilem in comparatione plurium substantiarum mihi præbuerit inversionem successivam; evincitur, saltem in iis substantiis rationem differentiarum pro aliis binariis esse aliam, quod evertit rationem differentiarum constantem, quam requirit Newtoniana analogia lucis, & colorum cum sono.

185. Id quidem fuse, & admodum luculenter exposui in secunda ex illis quinque veteribus meis dissertationibus, ubi habentur plura maxime idonea ad percipiendam intimius naturam hujus inversionis successivæ. Summam rei breviter attigi hic superius num. 95, & 96. Res tota est fusior, quam ut videatur huc transferenda ex illa dissertatione cum omnibus demonstrationibus, & calculis.

186. Ali-

186. Alibi fortasse olim agam de hisce omnibus proferens seriem observationum ad id pertinentium, quarum ope determinabo curvas ibidem indicatas, quæ referantur ad diversa substantiarum binaria; potissimum si invenero substantias idoneas ad perficienda multo magis telescopia acromatica per unionem trium colorum inductam a tribus substantiis, quam innui superius, & pro qua exhibui formulas generales in illa ipsa secunda dissertatione; quas inde excerptas exhibebo hìc in supplementis Opusculi II.

187. Ad usum, quem hìc mihi proposui, qui nimirum respicit telescopia acromatica habentia objectivum constans binis tantum subsantiis, quæ sola huc usque sunt constructa, abunde sunt formulæ superius erutæ methodis fuse expositis in hoc Opusculo. Cum eæ sint dispersæ in pluribus paragraphis, & commixtæ cum demonstrationibus; ut unico aspectu perspici possint, eas omnes collectas hìc proponam: adjiciam earum explicationem uberiorem, & exempla numerica, quibus tamen præmittam exempla observationum, & calculi pro determinandis radiis circulorum, qui adhibentur in hoc instrumento.

§. XV.

Formulæ pertinentes ad usum prismatum.

CLASSIS I.

Pro qualitate refractiva substantiæ unius prismatis.

Denominationes.

188: Ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti, in ingressu ex aere in substantiam prismatis . . . . m

Angulus ipsius . . . . a

Refractio . . . . r

Distantia perpendicularis puncti prismatis, ex quo radius prodit, a recta delineata in pariete . . . . . . p

Dis-

Distantia puncti, ad quod is radius abit in ea recta a perpendiculo in eam demisso e puncto eodem . . . . q

189. FORMULÆ PRO EA QUALITATE REFRACTIVA.

$$tan.r = \frac{q}{p} \qquad m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}.$$

CLASSIS II.

Pro qualitate refractiva, & distractiva substantiæ prismatis fixi eruenda ope prismatis variabilis.

DENOMINATIONES.

190. Ratio sinuum inventa per formulam præcedentem pro substantia prismatis variabilis . . . . M
Ratio eadem pro substantia prismatis fixi . . . . m
Angulus prismatis fixi . . . . a
Angulus prismatis variabilis {corrigens refractionem fixi . . . b / corrigens distractionem ipsius . . b'}
Valores subsidiarii . . . . x, x'

191. FORMULÆ ACCURATÆ PRO QUALITATE REFRACTIVA FIXI.

$$sin.(b-x) = \frac{sin.(b-a)}{M} \qquad m = \frac{M\,sin.x}{sin.a}$$

192. FORMULÆ PROXIMÆ VERIS PRO EADEM.

$$h = b - a \qquad n = h - \frac{h}{M} \qquad m = M + M\,sin.n\,cot.a.$$

193. FORMULÆ PRO QUALITATE DISTRACTIVA FIXI.

$$sin.x' = \frac{m}{M} \times sin.a \qquad \frac{dm}{dM} = \frac{m}{M} \times (tan.(b'-x')\,cot.x' + 1)$$

CLASSIS III.

Pro comparatione binarum substantiarum pertinentium ad bina prismata fixa.

DENOMINATIO, ET FORMULA.

194. Ratio sinuum pertinens ad primam substantiam . . . m
Ratio sinuum pertinens ad secundam . . . . m'

$$u = \frac{dm}{dm'} = \frac{dm}{dM} : \frac{dm'}{dM}.$$

§. XVI.

Exempla observationum, & calculi pro determinandis radiis circulorum hujusce instrumenti.

195. ANTE explicationem, & usum formularum paragraphi præcedentis proferam observationes pertinentes ad determinandos radios circulorum, qui adhibentur in instrumento exposito in primis paragraphis hujus Opusculi. Sunt autem duo: alter pertinet ad curvaturam superficierum prismatis variabilis, ut id collocari possit in distantia debita a centro instrumenti ipsius, alter ad fascias, quæ sunt affixæ cruribus, ut possit institui accurate earum divisio pro nonio exhibente angulos aperturæ instrumenti ipsius, a quibus pendent anguli, qui adhibentur in formulis. Incipiam a determinatione curvaturæ prismatis variabilis e quodam flint Veneto, quod adhuc adhibeo in instrumento primo hujus generis constructo Venetiis anno 1773. Hujusce determinationis methodus habetur numero 19.

196. Manente frusto longiore convexo, ut in fig. 3, notatus est tenui cuspide arcus secundum ejus curvaturam: applicato ipsi breviore cavo, tum hoc immoto, illud promotum est, & ipsi applicatum: summoto breviore, notata continuatione arcus secundum longius convexum, & ita porro alterna applicatione alterius ad

ad alterum immotum perfectus est integer circulus, qui fere accurate rediit ad primum punctum. Ejus circuli diameter inventa est 425 partium longitudinalium mei circini proportionis, qui in singulis cruribus habet partes æquales 300, earum autem 473 continet pes Parisiensis. Inventum est per constructionem centrum, in quo defixa est cuspis alterius cruris circini aperti ad inervallum partium 212 $\frac{1}{2}$ dimidium diametri inventæ, & altera cuspis pedis alterius circumducti, ubique inventa est satis accurate congruens cum arcu circuli prius notati præter exiguum tractum in fine, ubi in applicatione intercesserat exiguus motus irregularis frusti alterius. Idem deinde eadem methodo est præstitum super tabula habente superficiem proxime planam: delineato arcu majore semicirculo, ac invento per constructionem ejus centro, & ibi defixa altera cuspide circini aperti ad eundem numerum partium, altera circumducta inventa est semper accurate congruens cum arcu ipso.

197. Quæsitus est radius circuli delineati etiam per plures ejus chordas cum suis sagittis. Quadratum semichordæ divisum per sagittam, exhibet residuam diametrum, adeoque si quadratum chordæ integræ dividatur per quadruplam sagittam, & quoto provenienti adjiciatur semel sagitta ipsa, debet haberi vera ejus circuli diameter, cujus dimidium est radius quæsitus. Porro decimæ particulæ partium inventarum in sagittis assumptæ sunt per æstimationem, quæ tamen satis accurata esse potest, si quis animum advertat. Si enim cuspis circini cadat inter duo puncta terminantia unam e partibus lineæ rectæ divisæ in partes æquales ita, ut æque distet ab utroque; habentur particulæ decimæ quinque: ut habeantur duæ, vel octo, debet altera e distantiis ejus cuspidis esse alterius quadrupla. Pro differentia trium decimarum abeundum est ab æqualitate ad rationem quadruplam, quod discrimen est ita magnum, ut æstimatio nunquam possit committere errorem binarum decimarum, vix etiam possit admittere errorem unius; quamobrem mirum non erit, si determinationes diversæ, quas profero, tam bene congruant inter se. En determinationes ipsas.

chordæ	sagittæ	radii
231	34,2	212,1
267	47,0	213,1
276	50,3	214,4

198. Specimen calculi est expeditum, & patebit in tabula apposita numero 200. In ea habentur tres columnæ, in quarum singulis prima linea continet chordam cum duplo ejus logarithmo: duplum ipsum facile assumitur immediate e tabella, quin opus sit describere ipsum logarithmum simplicem. Secunda linea continet quadruplam sagittam cum complemento arithmetico logarithmi ipsius: tertia summam binorum præcedentium numerorum logarithmicorum, cum numero ipsi respondente: quarta sagittam ei numero suppositam: quinta horum binorum numerorum summam, quæ est integra diameter: sexta hujus dimidium, quod est radius curvaturæ quæsitus.

199. Complementum arithmeticum logarithmi desumitur immediate e tabulis æque facile, ac ipse logarithmus: satis est pro singulis notis, quæ describendæ essent ad habendum logarithmum, scribere earum residua ad 9, & postremæ residuum ad 10. Ut autem denotetur, id esse residuum arithmeticum, non ipsum logarithmum, apponetur supra primam notam, quæ exprimit characteristicam, lineola, quem morem vidi, adhibitum ab aliis nonnullis, & inveni maxime commodum, adeoque ipsum adhibebo in sequentibus exemplis omnibus, apponendo semper, ubi divisores occurrunt, complementum arithmeticum logarithmi pro ipso logarithmo, quo pacto evitatis subtractionibus omnia reducuntur ad summas: ipsi autem divisori præmittam punctum. Ubi assumendum sit duplum logarithmi, vel triplum, pro quadrato, vel cubo, præmittam numero notam 2, vel 3 cum puncto, quod eam dividat ab ipso numero: id punctum significabit non multiplicationem numeri sequentis per 2, vel 3, sed exponentem potentiæ ipsius, nimirum quadrati, vel cubi.

200. Omittam ubique, ut in duplis, vel triplis logarithmorum, ac in summis, de more decades, quæ ante characteristicam proveniant e summis, vel in logarithmis tangentium occur-

currant ultra 45 gradus : easdem supponam in assumendis logarithmorum dimidiis, vel trientibus : logarithmis numerorum constantium solis decimalibus apponam pro characteristica tot unitates, quot notæ zero præmittendæ sunt, ante reliquas ipsorum notas, & vice versa, ubi numeri incipiunt a decimis, characteristica erit 9, ubi a centesimis, millesimis &c, erit 8, 7 &c. Ejus rei usus non occurret in hoc primo exemplo, occurret autem sæpissime in paragraphis sequentibus. Is usus est jam communis, & maxime commodus, nec timeri potest, ne in errorem inducat, cum non possit fallere ; nisi ubi agitur de numeris vel perquam exiguis, vel immaniter ingentibus, qui nunquam solent occurrere, & si forte occurrant, incurrunt in oculos per sese. In logarithmis, & eorum complementis arithmeticis plerumque adhibebo sex notas tantum post characteristicam, sed ubi agetur de numeris inveniendis nimis exiguis, etiam solas quatuor. Illæ sex abunde erunt semper ad eam accurationem, quam requirunt perquisitiones hujus generis, in quibus fere semper omittam notas numerorum post quartam, quod evitabit usum molestum quærendi partes proportionales. En ipsa exempla.

2.231 4,727224	2.267 4,853023	2.276 4,881818
.136,8 . . . . $\overline{7}$,863914	.188 . . . . $\overline{7}$,725842	.201,2 . . . $\overline{7}$,696372
390,1 2,591138	379,2 . . 2,578865	378,6 . . . 2,578190
34,2	47,0	50,3
424,3	426,2	428,9
212,1	213,1	214,4

201. In prima linea primæ columnæ habetur 2.231, quod exprimit quadratum chordæ 231. Scribendum fuisset $(231)^2$. Præmitto exponentem cum puncto ad faciliorem impressionem tabularum, quæ occurrent in sequentibus exemplis : ipsum in eadem linea consequitur 4,727224, quod est duplum ejus logarithmi. In secunda linea habetur 136,8 quadruplum primæ chordæ 34,2 cum $\overline{7}$,863914, quod est complementum arithmeticum ejus logarithmi 2,136086, demptis nimirum singulis hujus notis præceden-

cedentibus a 9, & postrema a 10. Punctum præmissum numero 136,8 indicat, ipsum esse divisorem, & lineola posita supra $\overline{7}$ indicat, eum, cujus ipsa est characteristica, non esse logarithmum præcedentis numeri, sed id esse complementum arithmeticum ejus logarithmi. Tertia linea habet summam præcedentium logarithmorum 2,591138, quam præcedit numerus 390,1 respondens ei logarithmo in tabulis, adeoque eruendus inde post summam subductam, & scribendus sub præcedentibus numeris, qui fuerant scripti ante logarithmos erutos ex ipsis tabulis. Cum tabulæ communes exhibeant 4 notas, & characteristica sit tantum 2; postrema ex iis quatuor evasit decimalis. Quarta linea habet ipsam sagittam 34,2, quinta summam 424,3 præcedentium binorum numerorum; sexta ejus dimidium 212,1, neglectis centesimis.

202. Eodem modo secunda columna exhibet eundem radium 213,1, tertia 214,4. Eorum trium medium 213,2, quod ab invento per constructionem 212,5 non differt, nisi per septem decimas particulas unius exiguæ partis. Inde constat, ad inveniendum admodum accurate ejusmodi radium non esse necessariam delineationem totius circuli, sed satis esse arcum ipsius non nimis exiguum, cujus nimirum sagitta non sit nimis exigua.

203. Semidiameter circuli communis binarum fasciarum figuræ 9 inventus est partium earundem 286. Ea determinatio fieri non potest satis accurate circino communi ob binas lamellas perpendiculares plano basis vicinas centro. Sed id admodum facile præstatur ope regulæ, cui adnectantur ope ceræ binæ acus perpendiculares ejus longitudini. Altera facile adducitur ad centrum C, quam ipsam ob causam opus est efficere, ut ex laminæ terminentur paullo ante id centrum: tum altera inclinatur nonnihil ita, ut pertineat ad eum circulum. Id intervallum translatum in latus circini proportionis exhibuit eum numerum 286. Eodem intervallo delineatus est communi circino in charta crassiore circulus communis binis fasciis, nimirum internus exterioris minoris, & externus interioris majoris, per quem deinde facta est sectio communis dividens fascias chartaceas adnectendas binis fasciis metalli-

tallicis. Intervallo eodem accuratissime determinato per eas binas cuspides definitus est arcus graduum 60 in eodem circulo ante sectionem per eum factam adhibitâ summâ diligentiâ; nam exiguum discrimen induceret errorem plurium minutorum. Is arcus sectus est primum bifariam, tum in partes ternas, ac harum singulæ in denas, quo pacto habiti sunt singuli gradus: singuli quoque per lineolas breviores secti sunt bifariam, quæ divisio facta est versus centrum. Assumpto arcu graduum 29, is divisus est in partes 30 æquales lineolis tendentibus ad partes oppositas centro, & harum singulæ itidem sectæ bifariam exhibuerunt nonium duplicem, de quo num. 27. Divisionem, qua nunc utor, accuratissimam mihi humanissime delineavit celeberrimus Astronomus Messier, in delineandis elegantissime geometricis figuris apprime industrius. Utraque fascia chartacea adnexa est suæ fasciæ metallicæ glutine inducto hisce posterioribus ita, ut eæ priores applicarentur ipsis fasciis metallicis glutine, nihil ad sensum madefactæ sine periculo mutationis figuræ. Ita autem adnexæ sunt eæ fasciæ chartaceæ metallicis, ut instrumenti cruribus ad se adductis, & lamellis centro proximis se contingentibus, binæ ipsarum lineolæ, determinantes initia divisionum zero, accurate congruerent.

204. Præstaret habere divisiones insculptas ipsis fasciis metallicis, quæ durarent perpetuo, sed chartaceæ durant itidem diu, & æque accurate angulos determinant, præstantur autem multo facilius, cum divisio in metallo difficilius fiat accurata, & impensam ferat non exiguam.

205. His ita præparatis adnexa sunt frusta prismatis variabilis vitrei binis basibus ligneis ad distantiam a centro inventam, ac aperto, & clauso instrumento inventæ sunt binæ superficies convexa, & concava semper se invicem contingentes. Sed initio pro iis observationibus, quas proferam in §. sequenti, ita collocatum est frustum minus, ut parallelismus haberetur instrumento aperto ad gradus 25, adeoque ad habendos majores augulos minuebatur apertura. Id nimirum requirebat ibi positio fenestræ respectu parietis. In aliis observationibus, quas eodem instrumento deinde in-

institui alibi, parallelismus habebatur in apertura graduum 5 vel accurate, vel proxime, ut in iis, quæ habebuntur in §. 18. ea apertura inventa est 5°. 18'. Semper ante observationem determinabatur accurate locus parallelismi, ope heliostatæ, si qua suspicio occurreret de vi illata frustis prismatis variabilis, quæ mutaret eorum positionem respectu basium, & ad habendum angulum ipsius prismatis variabilis assumebatur differentia aperturæ actualis ab apertura parallelismi, quod hic semel satis erit monuisse. In sequenti paragrapho ponemus in tabella numeri 209 tantummodo angulum ipsum prismatis variabilis, ut immediate observatum per ejusmodi differentiam earum aperturarum.

§. XVII.

Explicatio formularum Classis primæ partis primæ cum exemplis.

206. Hæc Classis incipit num. 188. Denominationes patent ex ipsis titulis. Valor *m* est ratio sinuum quæsita, quam toties nominavimus: *a* est angulus prismatis inventus in casu prismatis variabilis, pro quo hic proferemus exempla, per differentiam aperturæ actualis ab apertura parallelismi. In aliis prismatis est angulus definitus ab ipsa apertura, ubi laminæ centro proximæ contingunt bina prismatis ipsius latera. Is autem est in fig. 18, & 19 (Tab. IV) angulus K. Valor *r* est refractio, nimirum in fig. 18 angulus HPT pro primo radio rubeo, & in fig. 19. H'P'T' pro postremo violaceo. Valor *p* est in priore figura distantia perpendicularis PH, in posteriore P'H': valor *q* in illa est recta HT, in hac H'T'.

207. Exhibebo jam exempla numerica pro usu earum formularum desumpta e 5 observationibus institutis ad determinandam qualitatem refractivam ejusdem illius mei prismatis variabilis e flint Veneto. Habebatur in pariete linea horizontalis cum verticalibus ad intervalla pollicum duorum incipientia a puncto *i*, in quod cadebat perpendiculum a centro foraminis. Adhibita est pro distan-

distantiis intermediis a verticali præcedente scala, quæ ope transversalium dividebat pollices quatuor in partes 1000 ad habendum numerum particularum millesimarum unius pollicis: satis enim erat multiplicare numerum partium ejus scalæ per 4 ad habendas ejusmodi particulas. Regula figur. 17 (Tab. III) erat pedum *6*, sive pollicum 72, cui cuspis addebat partes ejus scalæ 239 (*): eæ ductæ in 4 exhibent partes *956* millesimas unius pollicis, adeoque valor *p* erat partium millesimarum pollicis.72956. Diameter foraminis AA' erat partium scalæ 24, adeoque intervalla *ia*, *ia'* partium earundem 12, sive millesimarum 48 unius pollicis: is numerus est subtrahendus in fig. 18 (Tab. IV) pro radio rubeo a recta *i*T ad habendum valorem $aT = q$, & addendus in fig. 19 rectæ *i*T' ad habendum valorem $a'T' = q$ pro violaceo. Ipse autem valor *i*T, vel *i*T' determinabatur assumendo circino distantiam puncti T, vel T' a linea verticali præcedente ex illis, quæ terminabant binos pollices, transferendo id intervallum in scalam, & addendo quadruplum particularum inventarum numero pollicum indicato ab eadem præcedente linea verticali. Numerus particularum millesimarum inventus hisce reductionibus pro *a*T, *a'*T' est is, quo hìc utemur pro valore *q*.

208. Porro hìc, ubi agitur de determinanda semel qualitate refractiva prismatis variabilis adhibenda deinde semper in posterum, utar quinque notis particularum, quas exhibent observationes, & in valore anguli *r* adhibebo etiam partes decimas unius minuti, ut valor *m* medius pro rubeis, & violaceis proveniat minus erroneus, ac evidentius pateat, quantum sit exiguum discrimen illud, quod in ipsum inducunt errorculi commissi in instrumento, & in observationibus. Hinc in assumendis logarithmis numerorum, angulis tangentium, numeris logarithmorum, adhibendæ erunt partes proportionales, quas hìc supponemus ad-

(*) Calculus numericus fuisset expeditior; si tota distantia regulæ cum cuspide divisa fuisset in partes 50, & delineata scala, quæ hasce divideret singulas in partes 100 juxta numerum 53.

hibitas in charta separata : in omnibus fere aliis sequentibus non erit opus ullo calculo numerico præter eum, qui occurret in ipsis exemplis prolatis.

209. Ponemus primo loco observationes. Prima columna continebit angulos prismatis variabilis, quorum singuli sunt communes colori rubeo, & violaceo in singulis e quinque observationibus pertinentibus ad eos colores : secunda valorem *p* communem omnibus decem observationibus : tertia, & quarta valores *q* respondentes singulis valoribus *a*.

anguli *a*	valor *p*	*q* pro rubeo	*q* pro violaceo
22°. 0'	72956	18844	20048
20 . 0		16692	17656
18 . 0		14716	15504
15 . 0		11892	12482
12 . 0		9312	9732

210. En autem totam observandi methodum. Collocabatur heliostata ad distantiam a pariete paullo majorem longitudine AC figuræ 17 (Tab. III): adducebatur ejus foramen GG' (fig. 18, 19 Tab. IV) ad positionem, quæ induceret congruentiam alterius puncti extremi imaginis naturalis cum altera e lineolis verticalibus ductis per puncta *a*, *a'* ita, ut intervallum earum linearum caderet totum extra ipsam imaginem, & remaneret pro colore rubeo ad partes verticis K anguli prismatis variabilis, ut in fig. 18, pro violaceo ad partes oppositas, ut in fig. 19, congruentibus in illa punctis *a*, H, in hac *a'*, H'.

211. Inducta prius positione foraminis priore pro radio rubeo, adducebantur crura instrumenti ad eam aperturam, quæ differret ab apertura parallelismi per angulum observationi destinatum : hic ubi (num. 205) parallelismus habebatur exhibente nonio gradus 25, adducebatur pro angulo graduum 22 nonius ad 3, pro 20 ad 5, & ita porro, ac in ea apertura figebatur instrumentum ope cochleæ adnexæ cylindro cavo cruris alterius, ne motu ipsius instrumenti super tabella heliostatæ mutari posset apertura ipsa. Imponebatur instrumentum sic præparatum ei tabellæ, ac adducebatur

batur ante foramen ita, ut frustum minus prismatis variabilis exciperet superficie sua externa radium advenientem perpendiculariter ad sensum: inclinatione exigua ipsius instrumenti in latus, & usu cochlearum tabellæ instrumento suppositæ obtinebatur accurata positio perpendicularis radii GH figuræ 18, efficiendo, ut punctum V imaginis reflexæ congrueret cum G: tum alio motu ad sensum parallelo ipsius instrumenti efficiebatur, ut punctum P, in quo radius GH prodibat e prismate, contingeret cuspidem C regulæ figuræ 17 interpositæ inter parietem, & ipsum prisma variabile ad obtinendam distantiam PH cognitam $= p$. In eo situ determinabatur positio puncti T, quæ exhibebat iT, & dempto $ia = 48$ obtinebatur $a\mathrm{T} = q$. Tum remoto in latus instrumento adducebatur in figura 19 H' ad a' per motum exiguum foraminis heliostatæ: restituebatur instrumentum ante id foramen, & ejus motu obtinebatur prius congruentia puncti V' cum G', tum puncti P' cum cuspide regulæ: notabatur punctum T', quod exhibebat H'T', cui addito $\mathrm{H}'i = 48$, habebatur q.

212. Ex hisce observationibus obtinebatur valor m per applicationem numerorum a, p, q ad formulas numeri 189, quæ sunt $tan.r = \frac{q}{p}$, & $m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}$. Si regula figuræ 17 ab A usque ad C contineret accurate partes 50 subdivisas in 100; valor r ex priore formula erueretur fere sine ullo calculo numerico: tangens ipsius r pro radio tabulari partium 10000 esset ipse numerus q duplicatus, exhibente tum valore p eum radium: sed adhibitâ regulâ pollicum 72, cui cuspis adjecerat partes scalæ 239, sive particulas 956, singuli valores q sunt dividendi per 72956 valorem p, quod est præstitum in tabella sequenti labore contracto per logarithmos.

Pro rubeo			Pro Violaceo		
$.p =$	72956	$\bar{5},136940$	$.p =$	72956	$\bar{5},136940$
$q =$	18844	4,275173	$q =$	20048	4,302072
	16692	4,222508		17656	4,246893
	14716	4,167790		15504	4,190444
	11892	4,075255		12481	4,096285
	9312	3,969043		9732	3,988202
$tan.r =$	14°. 29',0	9,412113	$tan.r =$	15°. 21',9	9,439012
	12. 53,2	9,359448		13. 36,3	9,383833
	11. 24,3	9,304730		11. 59,9	9,327384
	9. 15,5	9,212195		9. 42,5	9,233225
	7. 16,4	9,105983		7. 35,9	9,125142

213. Prima linea continet valorem p cum puncto præcedente, quod exprimit, eum esse divisorem: ipsi adjungitur $\bar{5},136940$ complementum arithmeticum ejus logarithmi, quod indicat lineola posita super prima nota 5. Sequentes quinque lineæ exhibent valores q habitos ex observatione numeris scalæ reductis juxta num. 244 cum suis logarithmis sibi adscriptis: summa complementi logarithmici primæ lineæ additi singulis logarithmis earum quinque linearum habetur in singulis ex aliis quinque sequentibus lineis: in iisdem habentur anguli r, quorum eæ summæ sunt tangentes logarithmicæ. Eo pacto obtinentur tam pro radio rubeo, quam pro violaceo refractiones r respondentes primæ formulæ, in qua $tan.r = \frac{q}{p}$. Ope valorum r, & angulorum a invenitur valor m in formula secunda $m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}$.

214. Specimen calculi habetur in tabella sequenti, in qua columna prima refertur ad colorem rubeum, secunda ad violaceum, tertià habet partes duas, quæ continent solos valores m præcedentium ad videndum unico intuitu, usque ad quem limitem congruunt inter se observationes: in ejus fine habetur summa, tum pars quinta summæ, quæ exhibet valorem medium pro singulis iis coloribus. Infra eas binas columnas habetur summa eorum mediorum, tum dimidium ipsius summæ, quod potest assumi pro valore m debito radiis mediis, & differentia, quæ est valor dm per-

pertinens ad eam substantiam. Singulæ e prioribus binis columnis continent quinque ternaria linearum. In prima linea cujusvis ternarii habetur valor *a* cum complemento logarithmico ejus sinus: in secunda $a+r$ cum logarithmo sui sinus, qui valor habetur addendo simul *a* assumptum, & *r* inventum numero 248: tertia continet summam binorum præcedentium numerorum logarithmicorum, quam præcedit numerus *m* habens eam summam pro logarithmo.

$a = 22°. 0'$ . . . . $\bar{0}$,426425	.22°. 0' . . . $\bar{0}$,426425	1,5872	1,6201
$a+r = 36.29,0$ . . 9,774217	37.21,9 . . 9,783109	1,5876	1,6182
$m = 1,5872$ . . . 0,200642	1,6201 . . . 0,209534	1,5888	1,6180
.20. 0 . . . . $\bar{0}$,465948	.20. 0 . . . $\bar{0}$,465948	1,5874	1,6150
32.53,2 . . 9,734783	33.36,3 . . 9,743089	1,5876	1,6133
1,5876 . . . 0,200731	1,6182 . . . 0,209037	7,9386	8,0846
.18. 0 . . . . $\bar{0}$,510018	.18. 0 . . . $\bar{0}$,510018	1,5877	1,6169
29.24,3 . . 9,691063	29.59,9 . . 9,698948	3,2046	
1,5888 . . . 0,201081	1,6180 . . . 0,208966	$m = 1,6023$	
.15. 0 . . . . $\bar{0}$,587004	.15. 0 . . . $\bar{0}$,587004	$dm = 0,0292$	
24.15,5 . . 9,613685	24.42,5 . . 9,621175		
1,5874 . . . 0,200689	1,6150 . . . 0,208179		
.12. 0 . . . . $\bar{0}$,682121	.12. 0 . . . $\bar{0}$,682121		
19.16,4 . . 9,518612	19.35,9 . . 9,525594		
1,5876 . . . 0,200733	1,6133 . . . 0,207715		

215. In secunda linea singulorum ternariorum habetur primo loco numerus graduum, tum numerus minutorum cum una nota adjecta post comma, quæ exprimit partes decimas unius minuti: in tertia linea prima nota exhibet unitatem, reliquæ sunt notæ decimalium. In postrema columna priores quinque lineæ singularum ejus partium continent valores *m* inventos in tertia linea cujusvis ternarii præcedentium columnarum: sexta summam præcedentium quinque linearum: septima eandem summam divisam per 5, qui est numerus observationum. Eo pacto valor medius *m* pro primo radio rubeo est 1,5877, pro postremo violaceo 1,6169. Prima e sequentibus tribus lineis habet summam horum binorum valorum; secunda ejus dimidium 1,6023, qui est

est valor m pro radiis mediis : tertia differentiam eorundem valorum mediorum $1,6169 - 1,5877 = 0,0292$.

216. Determinationes pertinentes ad radium rubeum conveniunt inter se multo magis, quam eæ, quæ pertinent ad violaceum; quia, ut supra etiam monui suo loco, limes radiorum rubeorum est multo magis distinctus, quam limes violaceorum, qui evanescunt per gradus insensibiles. Vix sola tertia rubeorum determinatio a reliquis differt per unam millesimam : reliquæ quatuor vix differunt a se invicem per $\frac{4}{10000}$. Determinationes tamen etiam violaceorum minus differunt a media quam per $\frac{4}{1000}$. Inde patet, quam accuratus esse debeat valor medius assumptus hoc instrumento per plures observationes. Patet itidem, confirmari per hujusmodi observationes theorema opticum, rationem sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti esse constantem; cum nimirum tam exiguum discrimen inventum sit in valoribus m exprimentibus ejusmodi rationem; quod debet rejici in exiguos tot elementorum errorculos.

217. Valor dm non potest esse accuratus, cum errores commissi in observationibus exigui respectu totius valoris m, sint multo magis sensibiles respectu differentiæ dm tam exiguæ. Majore conclavis obscuritate adhibita, valor m violaceorum obvenisset adhuc major, adeoque major etiam valor dm. Hìc assumptus est in obscuritate tantum mediocri limes violaceorum satis adhuc sensibilium.

218. Quoniam in tertia columna tertia determinatio sola $1,5888$ differt multo magis a reliquis 4 fere penitus congruentibus inter se : si ea omittatur; reliquarum medium neglectis fractionibus inferioribus erit $1,5874$, adeoque pro medio inter ipsum, & $1,6169$ assumi poterit $1,6021$. Postrema nota in m radii violacei, & in dm erit satis incerta, nec adhibebuntur, nisi ubi inveniendus erit valor m, & dm aliarum substantiarum ad minuendum errorem, quem inducit omissio fractionum : nec vero usquam valore dm hinc eruto indigebimus in aliis posterioribus calculis, & in iisdem adhibebimus pro valoribus m substantiarum, quæ pro lentibus combinandæ erunt, solas priores 4 notas.

219. Ad-

219. Adhuc tamen ex valore $dm = 0,0292$ hìc invento patet, substantiam hujus prismatis variabilis esse quoddam flint. Pro vitro communi Newtonus invenerat 0,02 quem valorem credebat esse generalem vitris omnibus, ut & omnibus substantiis generalem fractionem $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$. Hìc invenimus dm quam proxime $= 0,03$, quem valorem superasset; si in conclavi magis obscuro assumpti fuissent radii violacei adhuc languidiores. In mediocri obscuritate, quam adhibere soleo, invenio dm per formulas sequentes pro vitro communi paullo minorem valore 0,02, & pro variis flint paullo minorem 0,03; licet in aliquibus occurrat major, & in vitro strass sit adhuc multo major. Sed ea comparatio pertinet ad sequentem paragraphum, in quo habetur accuratior relatio aliorum valorum dm ad hunc, valores autem dm absoluti ea methodo inventi nec pertinent ad colores prorsus extremos, nec sunt satis accurati.

§. XVIII.

Explicatio formularum secundæ Classis partis primæ cum exemplis.

220. Hæ formulæ incipiunt a numero 190. Denominationes hìc itidem per se patent. Valor M hìc est idem, ac valor m pro radiis mediis $= 1,6021$ (num. 218) pertinens ad substantiam hujusce prismatis variabilis, ut m applicetur aliis substantiis, quæ cum ipsa in hisce formulis comparabuntur efformato e singulis prismate fixo. In veteribus meis dissertationibus editis appellaveram m valorem variabilis, M fixi. Hìc denominationem invertendam censui, ut in formulis secundæ partis habeantur deinde m, & m' hìc inventi, qui adhiberi debent ad determinandas lentium sphæricitates. Valor m quæritur cum valore fractionis $\frac{dm}{dM}$, ex qua erui potest etiam dm, posito $dM = 0,0292$, uti obvenit in præcedenti paragrapho. Is valor licet absolute minus

accu-

accuratus, adhuc ingeret ideam vis distractivæ diversarum substantiarum per comparationem cum vi hujus vera pro primo rubeo comparato cum quodam e postremis violaceis non ita tenuibus, ut in mediocri obscuritate sensum effugiant.

221. Occurrunt autem tres anguli inventi ope hujus instrumenti, qui cum valore M semel invento debent exhibere valores quæsitos: angulus *a* prismatis fixi, angulus *b* prismatis variabilis, qui restituit spectrum ad locum naturalem, & angulus *b'* ipsius, qui invertit spectrum, quorum prior corrigit refractionem, posterior distractionem rubei a violaceo. Ubi comparatur aliud fl*i*nt cum hoc variabili, in reditu imaginis ad locum naturalem colores habentur exigui, & spectrum est fere ejusdem magnitudinis cum imagine naturali, adeoque unicus angulus observatur pro valore *b*: ubi comparantur vitra communia, colores sunt satis magni in ipso loco naturali, & proinde spectrum magis oblongum: tum potest observari seorsum angulus, qui restituat colorem rubeum in locum naturalem, & is, qui restituat violaceum: si ii anguli possent determinari penitus accurate; posset haberi valor *m* pro rubeo, & violaceo, separatim adhibendo valorem M rubei, tum valorem M violacei separatim inventos in §. præcedenti, & conjungendo ipsos una cum iis angulis separatim observatis pro *b*: inde erueretur etiam valor *dm*. Sed hìc quidem evaderet adhuc magis erroneus, quia præter errorem admissum in determinandis binis valoribus M exiguum respectu ipsorum, sed ingentem respectu differentiæ, accederent novi errores valorum *b* exigui respectu ipsorum, sed ingentes respectu differentiæ, quæ plerumque extenditur ad paucissima minuta. Hinc etiam, ubi observati erunt eo modo bini anguli, alter destruens refractionem rubei, alter violacei, satius erit adhibere unicum valorem *b* medium inter eos binos, & unico calculo invenire *m* respondentem cuidam medio: eo invento ope anguli *b* per primam partem harum formularum, & *dm* per secundam ope anguli *b'*, possunt inveniri valores *m* seorsum pro rubeo, & violaceo, demendo a valore *m* invento, & ipsi addendo, dimidium valoris *dm* inventi. Ii valores habe-

habebunt errorem exiguum respectu totius, ingentem respectu differentiæ.

222. Valores x, & x' sunt valores quidam subsidiarii respectu harum formularum: sunt autem anguli refracti in transitu e prismate fixo ad variabile, ille prior tum, cum corrigitur refractio, hic posterior, cum corrigitur distractio: in eo transitu angulus incidentiæ est ipse angulus prismatis fixi: ea pertinent ad theoriam radii transmissi per bina prismata conjuncta cum angulis respicientibus plagas oppositas, & ingressi in primum directione perpendiculari ad ejus superficiem, ut patebit in uno e supplementis, in quo exhibebo eam theoriam, quam adhibui in secunda ex iisdem veteribus dissertationibus. Alter conjungitur cum angulo b, alter cum b'. Ad calculum secundæ partis pro qualitate distractiva per formulas numeri 193 requiritur x': requiritur etiam x ad calculum accuratum pro refractiva, pro qua habentur formulæ numeri 191. Verum ubi agitur de substantiis, quæ habent exiguum discrimen in vi refractiva, uti esse solent vitra diversa, calculus evadit simplicior per formulas numeri 192 ita veris proximas, ut discrimen vel sit ad sensum nullum, vel omnino negligi possit.

223. Tres sunt formularum species, quibus hic applicandi sunt numeri ad præbendum exemplum calculi: prima numeri 191 pro determinatione accurata valoris m ex valoribus a, b, M suppositis accuratis: secunda numeri 192, pro eodem ex iisdem proxime determinando: tertia numeri 193 pro valore $\frac{dm}{dM}$ ex valoribus a, b', M. Pro prima inveniendus erit valor $b-x$ ex suo sinu ad habendum valorem x. Verum oportebit assumere in valore $b-x$ etiam secunda, vel saltem partes minutorum decimas, ut in secunda formula ejus speciei habeatur valor x accuratior: nam differentia sinuum angulorum differentium a se invicem uno minuto induceret in valorem m differentiam non exiguam respectu differentiæ valorum m, & M, quæ differentia invenitur immediate per secundam earum formularum speciem.

224. In formulis ejus speciei oportet invenire valorem subsi-

diarium $h = b - a$, & $n = h - \frac{h}{M}$, quod quidem fit admodum facile: scriptis valoribus M, a, & b, obtinetur statim h, qui valor si continet gradus, reduci potest ad minuta: ad latus habebitur complementum logarithmicum valoris M assumpti sine postrema nota, & logarithmus numeri n, quorum summa exhibebit logarithmum quæsiti valoris $\frac{h}{M}$: cum is debeat esse exiguus; satis erit assumere in iis logarithmis solas 4 notas post characteristicam, & in numero respondente ei logarithmo possunt omitti fractiones minutorum, cum agatur de determinatione valoris M $sin. n\, cos. a$ exigui addendi valori M ad habendum valorem integrum m, qui quæritur, & respectu cujus error commissus in eo additamento erit perquam exiguus. In formulis speciei tertiæ scribendum erit complementum logarithmicum valoris M, & logarithmus valoris m, quorum summa exhibebit logarithmum valoris $\frac{m}{M}$ bis adhibendum: ejus ope invenietur x' ex $sin. a$, tum $\frac{dm}{dM}$ ope tangentis $b' - x'$, & cotangentis x'. Cavendum est hic, & in secunda specie, ut fiat additio, vel subtractio termini involventis valorem $b - a$, & $b' - x'$, prout valor b fuerit major, vel minor, quam a; & b' major, vel minor quam x'.

225. Calculi progressus patebit magis exemplo, pro quo adhibebo bina prismata, alterum e vitro communi, alterum e flint, applicando ad utrumque vitrum in hoc paragrapho formulas classis secundæ a numero 191, & in paragrapho sequenti formulam illam, quæ est unica in classe tertia numero 194. Primo quidem quæsiti sunt diligenter anguli exiguorum prismatum, quæ sunt exsecta e binis eorum vitrorum laminis versus marginem. Inventus est angulus ope hujusce instrumenti pro vitro communi 15°. 10', pro flint 13°. 50'. Deinde adnexa sunt binis mensulis binorum crurum instrumenti bina frusta prismatis variabilis in ea positione, in qua parallelismus haberi deberet in apertura exigua, quam positionem exigebat aliud conclave, in quo hæ observationes sunt institutæ, & quæ-

& quæsitus est parallelismus : is adhibito heliostata inventus est ad aperturam 5°. 18', observatione repetita pluribus vicibus cum summo consensu. Applicato utroque prismate fixo ad frustum minus prismatis variabilis, quæsitus est ope heliostatæ angulus hujus destruens refractionem, tum angulus destruens distractionem: hic secundus determinatus est sine heliostata per inversionem spectri obliquam. Inversio directa, ubi adhibitum est prisma e vitro communi, præbuerat omnem illam successionem colorum, de qua egimus a num. 148, ubi angulus mediæ inversionis erat admodum incertus: in inversione obliqua multo minus dubitari poterat, & plures observationes exhibuerant angulos parum admodum diversos, ut patebit ex sequentibus numeris.

226. Interea monebo illud tantummodo, inversionem factam esse pro vitro communi multo ante appulsum spectri ad locum naturalem, & in ipso loco naturali colores fuisse admodum largos: inter locum inversionis, & locum naturalem habita est refractio coloris rubei major refractione violacei: inversio ipsa directa in itu versus locum naturalem facta est secundo e modis expositis numero 148, & in reditu versus locum naturalem primo modo per evanescentiam rubei in margine remotiore a loco naturali, & successionem omnium colorum in eodem margine. Adhibito prismate fixo e flint inversio est facta prope ipsum locum naturalem, in quo, ubi eadem erat directa, colores aderant, sed vix erant sensibiles. In ipso loco naturali quando adhibitum est prisma e flint, imago erat ad sensum æqualis imagini naturali: quamobrem assumptus est unicus angulus destruens refractionem: ubi autem adhibitum est vitrum commune, spectrum in ipso loco naturali satis oblongum, & cum coloribus illis largis, præbuit occasionem determinandi binos angulos, alterum destruentem refractionem coloris rubei, alterum violacei.

227. En observationes ipsas uti tum sunt notatæ, cum reductione angulorum aperturæ ad angulos prismatis variabilis per detractionem aperturæ parallelismi = 5°. 18'.

Adhibito	*In destructione refractionis*		*In inversione spectri.*	
	Apertura	Angulus b	Apertura	Angulus b'
Vitro communi.	pro rubeo 18°. 34'	13°. 16'	14°. 11'	8°. 53'
	18 . 34	13 . 16	14 . 9	8 . 51
	pro violac. 18 . 30	13 . 12	14 . 9	8 . 51
	18 30	13 . 12	14 10	8 52
Flint.	19 . 10	13 . 52	18 . 50	13 . 32
	19 . 10	13 . 52	18 . 49	13 . 31
	19 . 10	13 . 52	18 . 49	13 . 31

228. Habentur in superiore tabella columnæ numerorum quatuor. Prima in parte superiore continet binas observationes pro apertura, in qua destruebatur refractio coloris rubei facta a vitro communi, & alias binas pro ea, in qua destruebatur refractio coloris violacei: eadem prima in parte inferiore continet tres observationes pro apertura, quæ totam imaginem reducebat simul ad locum naturalem adhibito flint. Secunda columna continet angulos prismatis variabilis respondentes iis aperturis, qui anguli habentur demendo ab iisdem aperturam parallelismi 5°. 18'. Sic 18°. 34' — 5°. 18'. exhibuit 13°. 16'. Tertia columna continet aperturas, in quibus fiebat inversio spectri, quarta angulos iis respondentes, qui obtinentur demptis hìc etiam 5°. 18'.

229. Observationes pro destructione refractionis, fere semper sunt prorsus consentientes: pro destructione distractionis invenitur exiguum discrimen, cum ferendum sit judicium de media inversione, quod phænomenum est minus distincte determinatum: sæpe in ea determinatione occurrunt discrimina multo majora, quam ea, quæ hìc habentur: tum multiplicandæ sunt observationes, & semper assumendum est medium pro b': itidem assumendum medium inter valores b pertinentes ad rubeum, & violaceum. Hinc erit pro

Pro

Pro vitro communi . . $\begin{cases} a = 15^\circ.\ 10' \\ b = 13\ .\ 14 \\ b' = 8\ .\ 52 \end{cases}$

Pro flint . . . . $\begin{cases} a = 13\ .\ 50 \\ b = 13\ .\ 52 \\ b' = 13\ .\ 31 \end{cases}$

Hæc cum valore M sunt elementa totius calculi ; ipsum autem M assumemus $= 1,602$ ex num. 215 , neglectâ postremâ decimali 0,0002 .

230. Formulæ numeri 191 erant $sin.(b-x) = \frac{sin.(b-a)}{M}$, & $m = \frac{M\, sin.x}{sin.a}$: en specimen calculi numerici .

Pro vitro communi	
$a = 15^\circ.\ 10'$	$sin.1^\circ.\ 56'$ . . $8,528102$
$b = 13\ .\ 14$	.M . . . . . . $\bar{9},795338$
$b-a = -1\ .\ 56$	$sin.1^\circ.12',4$ . . $8,323440$
$b-x = -1\ .\ 12,4$	M . . . . . . $0,204662$
$x = 14\ .\ 26,4$	$sin.x$ . . . . $9,396837$
	.$sin.a$ . . . . . $\bar{0},582316$
	$m = 1,527$ . . $0,183815$

Pro flint.	
$a = 13^\circ.\ 50'$	$sin.0^\circ.\ 2'$ . . $6,764756$
$b = 13\ .\ 52$	.M . . . . . . $\bar{9},795338$
$b-a = 0\ .\ 2$	$sin.0^\circ.1',2$ . . $6,560094$
$b-x = 0\ .\ 1,2$	M . . . . . . $0,204662$
$x = 13\ .\ 50,8$	$sin.x$ . . . . $9,378987$
	.$sin.a$ . . . . $\bar{0},621423$
	$m = 1,603$ . . $0,205072$

231. In utraque applicatione habentur binæ columnæ : prima continet in duabus primis lineis valores a , b , in tertia eorum differentiam $b-a$, quæ in vitro communi evasit negativa $-1^\circ.\ 56'$, in flint positiva $0^\circ.\ 2'$. In prima linea secundæ columnæ habetur hæc differentia inventa cum logarithmo ejus sinus, in secunda M cum complemento sui logarithmi , adeoque in tertia linea eorum summa exhibet sinum logarithmicum valoris $b-x$, qui valor invenitur $-1^\circ.\ 12',4$ in priore , $0^\circ.\ 1',2$ in posteriore , assumptâ unâ notâ decimalium , quæ invenitur in alia charta separata ope partium proportionalium . Hic valor $b-x$ habetur itidem in linea quarta columnæ primæ , quo collato cum valore b lineæ secundæ , obtinetur valor x addendo valori b valorem inventum in priore applicatione , ubi erat negativus , & ipsum subtrahendo in secunda , ubi erat positivus .

232. Ibi

232. Ibi desinit applicatio primæ formulæ exhibentis valorem x. In reliquis 4 lineis columnæ secundæ habetur applicatio secundæ formulæ. Prima ex iis continet M cum suo logarithmo: secunda habet x cum logarithmo ejus sinus, qui eruitur e tabulis communibus, adhibitâ methodo differentiarum proportionalium in charta separata ob fractionem additam minutis: tertia habet $sin.a$ cum complemento logarithmico ejus sinus: quarta trium logarithmorum summam cum valore m adnexo, qui ipsi respondet.

233. Apponemus jam exempla applicationis numerorum ad formulas speciei secundæ, & tertiæ, quarum altera exhibebit hos eosdem valores m calculo breviore, quia in ipso abstinebimus ab usu partium proportionalium. Ternas columnas continebunt in tabula numeri sequentis exempla singula. Prima continebit valores pertinentes ad utramque determinationem, reliquæ binæ earum singulas. Invenietur nimirum in secunda valor m, in tertia logarithmus valoris $\frac{dm}{dM}$ sine numero ipsi respondente; cum ad ea, quæ consequentur, satis sit logarithmus solus sine ipso numero. Accedet ibi determinatio valoris dm ex dM supposito $= 0,0292$. Fractionem facilioris impressionis gratiâ exprimemus interpositis binis punctis $dm:dM$, quod sæpe etiam inferius præstabimus.

234. Formulæ numeri 192 sunt tres $h = b - a$, $n = h - \frac{h}{M}$, $m = M + M\,sin.n\,cot.a$: formulæ autem numeri 193 sunt duæ

$$sin.x' = \frac{m}{M} \times sin.a \qquad \frac{dm}{dM} = \frac{m}{M} \times (tan.(b'-x')\,cot.x' + 1).$$

En applicationem numerorum prius pro vitro communi, tum pro flint, quam deinde explicabimus.

Pro

Pro vitro communi.		
$a = 15°. 10'$	.M . . . . $\bar{9},7953$	.M . . . . $\bar{9},795338$
$b = 13 . 14$	116 2,0645	m 0,183839
$b' = 8 . 52$	72,4 1,8598	9,979177
$M = 1,602$	M 0,2047	$sin . 15°. 10'$ 9,417684
$h = -1°.56'$	$sin . n$ 8,1031	$sin . 14 . 26$ 9,396861
$-h : M = 1 . 12,4$	$cot . a$ 0,5669	$cot . 14 . 26$ 0,589431
$n = -0 . 43,6$	$-$ 0,075 . . . 8,8747	$tan .$ 5 . 34 8,988842
$x' = 14 . 26$	$M = 1,602$	$-$ 0,3787 . . 9,578273
$b' - x' = - 5 . 34$	$m = 1,527$	0,6213 . . 9,793301
		$dm : dM$ 9,772478
		$dM = 0,0292$ . . 8,465383
		$dm = 0,0173$ . . 8,237861

235. Prima columna habet partes tres. In prima habentur 4 valores dati a, b, b', M, per quos debent determinari valores quæsiti. Prima linea partis secundæ habet $h = b - a = - 1°. 56' = - 116'$, qui numerus est dividendus per M. Ea divisio habetur in prima parte columnæ secundæ, cujus prima linea habet M cum complemento arithmetico sui logarithmi, secunda numerum 116 cum suo logarithmo, tertia summam eorum logarithmorum cum numero 72,4 ei respondente, qui est quotus quæsitus. Satis autem sunt in tota hac columna solæ 4 notæ post characteristicam, ob exiguitatem numeri h. Numerus $- h : M = 72',4 = 1°. 12',4$ habetur in secunda linea secundæ partis columnæ primæ, cujus ope obtinetur in tertia linea $n = h - \frac{h}{M} = - 0°. 43',6$. Ejus usus occurrit in secunda parte columnæ secundæ, cujus prima linea habet M cum suo logarithmo, secunda $sin . n$ cum suo, tertia $cot . a$ itidem cum suo. Horum logarithmorum summa exhibet in linea quarta logarithmum numeri 0,075, qui est valor formulæ $M \, sin . n \, cot . a$. Ipsi autem præmittitur signum negativum ob valorem n negativum. Linea quinta continet valorem M, a quo demendo superiorem negativum remaneret $m = 1,527$. Omissæ sunt in omnibus calculis harum columnarum partes decimæ millesimæ pro valoribus M, & m. Hic valor m est idem

dem cum invento priore methodo accurata pro m numero 230.

236. Tertia columna habet duas partes destinatas binis formulis numeri 193. In prima linea partis primæ habetur M cum suo complemento logarithmico, in secunda valor m jam inventus cum suo logarithmo: hinc in tertia habetur logarithmus fractionis $\frac{m}{M}$ bis adhibendus. Linea quarta habet sinum a cum suo logarithmo, ac summa ipsius, & superioris in quinta linea est sinus logarithmicus valoris x', ob $sin.x' = \frac{m}{M} \times sin.a$. Is valor x' habetur in tertia parte primæ columnæ, ac ejus differentia a valore b' posito in linea tertia primæ partis columnæ ejusdem exhibet in secunda linea partis tertiæ ipsius valorem $b'-x' = -5°.34'$. Logarithmus cotangentis ipsius x' habetur in prima linea partis secundæ, logarith. $tan.(b'-x')$ in secunda: hinc obtinetur in tertia logarithmus valoris $tan.(b'-x')\, cot.x'$, & ipse valor $-0,3787$ negativus ob $b'-x'$ valorem negativum.

237. Complementum arithmeticum hujus numeri negativi $= 0,6213$ est valor totus inclusus parenthesi in illa secunda formula $= tan.(b'-x')cot.x' + 1$. Is debet duci in $m:M$: idcirco ipsi adscribitur in linea quarta ejus logarithmus, cujus summa cum logarithmo valoris $m:M$, qui habetur in linea tertia partis primæ, exhibet in linea quinta logarithmum totius valoris formulæ pertinentis ad valorem $dm:dM$. In linea sexta habetur valor dM cum suo logarithmo, cujus summa cum logarithmo lineæ præcedentis exhibet logarithmum valoris dm: is valor ipsi adscriptus rem omnem absolvit: exhibet autem valorem $dm = 0,0173$ admodum exiguum, quia valor $dM = 0,0292$ in vitro hujus prismatis variabilis assumptus in exigua obscuritate obvenit & ipse exiguus: valor $dm:dM$ debet esse accuratior, qui cum idem dM adhibeatur pro utroque vitro comparando cum eo variabili, debet reddere multo minus erroneam rationem binorum dm.

238. Eâdem prorsus ratione res perficitur in exemplo sequenti relato ad tabulam positam in fine hujus numeri pro illo flint. Tantummodo cum ibi valor $h = 0°.2'$ sit perquam exiguus; in ter-

...4 ; D''D''' = 40
= 32 ; $x = \frac{ph}{p + h}$

III

h = 13,75 ; h' = 20,62
h'' = 26,52 ; h''' = 31,43

IV

= − 870,11 = p . . 2,939574
= 14 1,146128
= 856,11 . . . . . $\bar{7}$,067471
= 14,23 = x . . 1,153173

= − 23
= − 8,77 = p' . . 0,943000
= 21 1,322219
= 12,23 . . . . . $\bar{8}$,912574
= − 15,06 = x' . . 1,177793

= − 44
= − 59,06 = p'' . . 1,771293
= 27 1,431364
) = − 32,06 . . . . . $\bar{8}$,494037
= 49,74 = x'' . . 1,696694

' = − 40
= 9,74 = p''' . . 0,988559
= 32 1,505150
) = 41,74 . . . . . $\bar{8}$,379448
= 7,47 = x''' . . 0,873157

V

DC = − 870,11 = p . . 2,939574
h = 13,75 1,138303
.($p + h$) = − 856,36 . . . . . $\bar{7}$,067343
Dg = 13,97 = x . . 1,145220

D'D = − 23
D'g = − 9,03 = p' . . 0,955688
h' = 20,62 1,314394
.($p' + h'$) = 11,59 . . . . . $\bar{8}$,935917
D'i = − 16,07 = x' . . 1,205999

D''D' = − 44
D''i = − 60,07 = p'' . . 1,778658
h'' = 26,52 1,423539
.($p'' + h''$) = − 33,55 . . . . . $\bar{8}$,474308
D''n = 47,48 = x'' . . 1,676505

D'''D'' = − 40
D'''n = 7,48 = p''' . . 0,873902
h''' = 31,43 1,497325
.($p''' + h'''$) = 38,91 . . . . . $\bar{8}$.409939
D'''r = 6,04 0,781166

IX

. . . . 0,445977

. . . . $\bar{8}$,854780
. . . . 0,955688
,80 . . 0,256445

. . . . $\bar{8}$,794001
. . . . 1,778658
,75 . . 0,829104

. . . . $\bar{8}$,323495
. . . . 0,873902
,06 . . 0,026501

X

CD 2,939574
D'''P 9,675192
.D'''R. . . . . $\bar{9}$,126843
n = 55,16 . . 1,741609

DE 0,445977
3438 3,536306
.CD . . . . . . $\bar{7}$,060426
11,03 . . 1,042679
22' campus

XI

D'''P 0,121169
.D'''R . . . . . . $\bar{9}$,126843
t. 10.° 2'. 18'' . . 9,248012

D'''p 0,026500
.D'''r . . . . $\bar{9}$.218834
t. 9.° 58'. 40'' . . 9,245334

0 . 3 . 38''
0 . 7 . 16 colores

864 2,936514
.n . . . . $\bar{8}$,258391
15,66 . . 1,194505

tertia linea columnæ secundæ assumitur pro valore $\frac{h}{M}$ etiam una nota decimalis, ac ponitur 1', 2. Inde pro n remanet 0', 8 valor minor unitate in linea sexta columnæ primæ. Logarithmus ejus sinus male assumeretur per partes proportionales ex tabulis sinuum communibus non habentibus nisi gradus, & minuta prima; cum differentiæ logarithmorum pertinentium ad numeros tam exiguos non sint proportionales. Verum is facile obtinetur assumendo logarithmum minutorum 8, qui est 7, 3668. Dempta unitate ab ejus characteristica habetur logarithmus anguli $\frac{8'}{10}$, cum sinus angulorum exiguorum sint proportionales ipsis angulis. Is logarithmus habetur in linea quinta columnæ secundæ. Cætera omnia procedunt eodem modo, quo in applicatione præcedenti. Sed valor 0,002 lineæ 7 columnæ 2, cum sit positivus, additur sequenti valori M ad habendum m, dum in præcedenti applicatione subtrahebatur. In fine valoris m haberetur 36, pro quo scribitur 4 omissâ quintâ notâ, cum vix quarta possit sperari exacta.

Pro flint.		
$a = 13°. 50'$	.M . . . . $\bar{9}, 7953$	.M . . . . $\bar{9}, 795338$
$b = 13. 52$	2 . . . . 0, 3010	m 0, 205204
$b' = 13. 31$	1, 2 . . . . . 0, 0963	0, 000542
M = 1, 602	M 0, 2047	sin. 13°. 50'. . . . 9, 378577
$h = 0°. 2'$	$sin. n$ 6, 3668	sin. 13. 51. . . . 9, 379119
$-h$:M = − 0. 1, 2	$cot. a$ 0, 6086	cot. 13. 51. . . . 0, 608097
$n = 0. 0, 8$	+ 0, 002 . . 7, 1801	tan. 0. 20. . . . 7, 764761
$x' = 13. 51$	M = 1, 602	− 0, 0236 . . . 8, 372858
$b' - x' = − 0. 20$	m = 1, 604	9, 9764 . . . 9, 998974
		dm : dM 9, 999516
		dM = 0, 0292 . . 8, 465383
		dm = 0, 0292 . . . 8, 464899

239. Valor m obvenit hìc = 1, 604, dum præcedenti methodo numero 230 obvenerat 1, 603 cum discrimine unius millesimæ: id discrimen re ipsa non est nisi partis quintæ unius millesimæ: nam ibi logarithmo 0, 205021 respondet numerus 1, 6033, hìc in columna secunda linea 7 debet habere numerum 0, 00151,

& in linea 8 pro $M = 1,6021$, quorum summa efficit $1,60361$: hic valor ab illo $1,6033$ non differt, nisi per $0,0002$. Sed cum ibi habeatur post quartam notam 3 minus, quam 5, & hìc 61 plus, quam 50; ibi illa nota negligitur, hìc ipsi substituitur unitas in nota præcedenti. Verum satis est habere valorem m usque ad millesimas, quæ ne ipsæ quidem sunt prorsus accuratæ: partes unius millesimæ partis hisce methodis determinari non possunt.

240. In paragrapho sequenti retinebo logarithmum fractionis $dm : dM$ inventum num. 234 pro illo vitro communi, & hìc pro hoc flint, ad inveniendam rationem, quam habent ad se invicem bini valores dm pertinentes ad hæc vitra. In calculis numericis capitis IV Opusculi II, ubi proferuntur exempla applicationis numerorum ad alias formulas, occurret alius pertinens ad alia vitra cum valore $m = 1,526$ pro vitro communi, & hoc eodem $1,604$ pro flint, quod nihil obest, ubi agitur tantummodo de calculorum exemplis.

§. XIX.

Explicatio formulæ classis tertiæ cum exemplis.

241. HÆC formula habetur numero 194, & paucis expeditur. Ejus ope comparantur inter se binæ substantiæ comparatæ in parte secunda cum substantia prismatis variabilis in ordine ad vim distractivam. Valor m, & dm retinetur hìc pro vitro communi: pro flint vero additur accentus, ut sit m', & dm'. Ii sunt hìc iidem, qui fuerant m, & dm pro flint numero præcedenti. Quæritur valor $dm : dm'$, quod perficitur tribus lineis: prima continet valorem $dm : dM$ cum suo logarithmo $= 9,772478$: secunda $dm' : dM$ cum complemento $0,000484$ sui logarithmi, qui in fine numeri præcedentis erat $9,999516$: in tertia habetur præcedentium logarithmorum summa cum suo numero, qui est valor quæsitus. Additur autem quarta linea, in qua habetur complementum arithmeticum logarithmi tertiæ cum numero, qui ipsi respondet, & est valor $dm' : dm$, cujus usus itidem occurrit aliquando. En ipsum specimen

dm :

$dm : dM$	$9,772478$
$dm' : dM$	$\bar{0},000484$
$n = dm : dm' = 0,5929$	$9,772962$
$1 : n = dm' : dm = 1,687$	$0,227038$

242. Hic postremus valor est major, quam 1, 5, quem exhiberet ratio virium distractivarum 3 : 2, quam communiter adhibent, qui proponunt calculos pro flint, & crown. Inter diversa vitra flint habetur ingens discrimen vis distractivæ, & id, quod appellant strass, habet eam vim adhuc multo majorem. Vitra communia habent itidem discrimen non exiguum. Quo major est fractio $dm' : dm$, & minor valor m' respectu m, eo aptiora sunt vitra pro lentibus acromaticis. Sunt, qui censeant, semper majorem esse debere vim refractivam pendentem a valore m, quando est major vis distractiva pendens a comparatione binorum dm. Id quidem hic ita accidit in hisce binis vitris, in quibus inventum est in tabula numeri 234 pro vitro communi $m = 1,527$, pro flint $m' = 1,604$ num. 238, & hic fractio $dm' : dm$ major unitate. Sed in comparatione hujus flint cum eo, ex quo constat illud prismatis variabilis, inventus est eodem num. 238 valor $m = 1,604$ major valore $M = 1,602$, & fractio $dm : dM$ minor unitate, cum ejus logarithmus, qui in eo ipso numero est $9,999516$, indicet ejus valorem minorem unitate.

243. Discrimen quidem est exiguum, & provenit a discrimine valorum a, & b, qui ibidem differunt solis binis minutis: sed saltem ii valores prope æquales exprimunt vires refractivas prope æquales, dum discrimen inter a, & b minutorum 19 denotat discrimen multo majus in viribus refractivis. Generaliter ex omnibus hujusmodi observationibus colligitur, vires distractivas non esse proportionales viribus refractivis. In hisce ipsis exemplis id patet comparando binos m, & m' hujusce vitri communis, & flint, ac binos eorum dm, dm' comparatos inter se ope ejusdem dM. Bini $m = 1,527$, $m' = 1,604$ non differunt nisi parte posterioris $\frac{1}{42}$, dum fractio $dm' : dm$ est $= 1,687$, nimirum dm' ad dm ut 1000 ad 1687.

244. Plures ego quidem substantias jam contuli inter se ope

R 2 hujus.

hujus instrumenti: meditabar ingentem numerum ejusmodi observationum, sed proferam in supplemento VI. plurimas ab amico institutas hac mea methodo in Italia. Cælum Parisiis raro admodum interdiu serenum sæpe jam observationes meas abrupit, quas idcirco sæpe coactus sum omittere per plures menses continuos. Interea proponam hic seriem nonnullarum e determinationibus, quas habui valorum m, & dm: priores sunt plurium vitrorum communium, posteriores plurium flint.

Pro pluribus vitris communibus

	1	2	3	4	5
m	1,514	2,526	1,529	1,538	1,542
dm	0,0170	0,0174	0,0182	0,0181	0,0180

Pro pluribus flint.

m'	2,590	1,593	1,594	1,604	1,625
dm'	0,0279	0,0271	0,0279	0,0286	0,0328

245. In pluribus ex hisce valoribus apparet, cum minore vi refractiva conjungi majorem vim distractivam. Adhuc tamen quoniam discrimen est exiguum, inquirendum erit in idipsum methodo, quæ minores differentias cum multo majore, & minus incerta determinatione exhibeat, quam exposui in §. 10. Ad eos usus, quos in hoc Opusculo persequimur, abunde sunt determinationes, quas proposuimus. Valores hic propositi pro variis dm, & dm' cum non contineant, nisi tres notas tantummodo, sæpe essent minus idonei ad eruendam fractionem $dm : dm'$ adhibendam in calculis instituendis pro determinandis sphæricitatibus lentium, quæ debent adhiberi in telescopiis acromaticis, qui est præcipuus harum perquisitionum ultimus scopus. Pro iis valor fractionis adhibetur accuratior methodo numeri 241 erutus ex logarithmis fractionum $\frac{dm}{dM}$, $\frac{dm'}{dM}$ collatis invicem. Hos dm, & dm' protuli tantummodo ad ingerendum animis discrimen inter vires distractivas, quod in vitris communibus solet esse exiguum, in diversis autem generibus vitrorum flint hic etiam abit a 27 fere ad 33; in aliis adhuc etiam majus invenitur aliquando, & eo majus, quo plus plumbi admixti habent.

SUP-

SUPPLEMENTA

Ad Opusculum Primum.

SUPPLEMENTUM I.

Theoria radii incidentis ad perpendiculum in primam superficiem prismatis primi e duobus conjunctis.

1. Sint in fig. 42 (*) bini anguli refringentes BAC, ACL ordine inverso positi cum latere communi AC. Incurrat radius DE perpendiculariter in latus AB, per quod transibit irrefractus, & incurret in F in latus AC, ubi a recto itinere FQG deflectet ad FOK, recedendo a perpendiculo IFH: sed in appulsu ad LC in O iterum, relicto recto tramite OK, recedet a perpendiculo HOP per rectam OR. Sit H concursus mutuus binorum perpendiculorum IF, PO, & S, Q concursus rectarum OH, OR cum DG. Patet, angulum POR fore æqualem simul binis OQS, OSQ, quorum primus æquatur GQR, nimirum refractioni totali radii pro directione DQG habentis directionem OQR; secun-

(*) Hæc figura est aptata casui, in quo prisma BAC vitreum immittatur intra receptaculum ejus vitrometri mei veteris, quod tum adhibebam, & cujus descriptio habebitur hic in supplemento II. Injecta est mentio ipsius numero 164 hujus Opusculi I. AMNL est ipsum receptaculum plenum aqua, B inclinatio laterum AM, LN ad se invicem, qui est angulus instrumenti: immisso in aquam prismate vitreo habente angulum $A = a$, & applicato ejus latere lateri AM instrumenti ipsius, exoritur angulus aqueus $ACL = b$, qui est summa angulorum A, & B. Angulum B ipsius instrumenti appellaveram c: adeoque ibi habebatur $c = b - a$. Cum in hoc Opusculo agatur de angulo variabili vitreo b, & fixo a; nullus hic occurrit usus anguli c. Potest is esse usui pro novo vitrometro aqueo, quod occurret in supplemento III. Hic excerpsi ea tantummodo, quæ hic erant usui, & nonnullas demonstrationes melius concinnatas contraxi.

cundus, cum sit supplementum anguli ESO, æquatur angulo B, qui ob angulos in quadrilineo BESO rectos ad E, & O est itidem supplementum ipsius ESO: idem autem angulus B est differentia angulorum BAC, ACL binorum prismatum. Adeoque si anguli iidem dicantur a, & b, angulus autem POR, qui est angulus refractus postremus, y; erit $y = b - a + r$.

2. Primus angulus incidentiæ DFI, prorsus ut num. 75 hujus Opusculi, erit æqualis angulo refringenti $A = a$, cum nimirum ob angulos AFI, AEF rectos uterque sit complementum ejusdem anguli EIF. Primus angulus refractus erit HFO, qui dicatur x, ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti in transitu ex aere ad substantiam primi anguli sit $m:1$, ad substantiam secundi $M:1$, & erit in transitu a prima ad secundam $M:m$ (*). Quare erit $M:m :: sin.a : sin.x = \frac{m\, sin.a}{M}$.

3. Secundus angulus incidentiæ erit HOF. Is cum $HFO = x$ est supplementum tertii anguli H, cujus itidem supplementum est $FCO = b$ ob angulos in quadrilineo HFCO rectos ad F, & O. Quare ii duo simul erunt æquales angulo b, & solus HOF erit $= b - x$: Angulus autem secundus refractus est $POR = y$. Quare erit $1 : M :: sin.(b-x) : sin.y$, adeoque $sin.y = M\, sin.(b-x)$.

4. En igitur denominationes, & formulas fundamentales omnium, quæ nobis hic occurrent invenienda, vel demonstranda:

Angulus primi prismatis . . . . a
Angulus secundi . . . . b
Refractio . . . . r
Angulus primus refractus x
Angulus secundus refractus . . . . y

FOR-

(*) Id pertinet ad prima Dioptricæ elementa: fiet enim is transitus tanquam si interjaceret velum aeris: in transitu e prima substantia in aerem eadem esset ratio inversa prioris $1:m$, & ex aere in secundum $M:1$: ratio ex iis composita evadit $M:m$.

FORMULÆ FUNDAMENTALES.

$$y = b - a + r \qquad sin.x = \frac{m}{M} \times sin.a \qquad sin.y = M\,sin.(b - x)$$

5. Omissis plurimis, quæ deducuntur ex hisce formulis, en ea, quæ huc pertinent. Ubi in transitu per bina prismata radius redit ad locum naturalem, refractio r evadit $= 0$; adeoque habetur in prima formula $y = b - a$, & tertia evadit $sin.(b - a) = M\,sin.(b - x)$, adeoque $sin.(b - x) = \frac{sin.(b - a)}{M}$: secunda $sin.x = \frac{m}{M} \times sin.a$ exhibet $m = \frac{M\,sin.x}{sin.a}$. Porro hæ sunt binæ formulæ numeri 136 hujus Opusculi, quæ fuerant hìc demonstrandæ primo loco.

6. Deductio formulæ numeri 145 pro valore $\frac{dm}{dM}$ est multo operosior, & supponit duo theoremata, quæ pertinent ad calculum differentialem : sed ea hìc ita demonstrabimus in adnexa nota (*), ut intelligi possint etiam ab iis, qui in eo calculi genere non sunt initiati : iis accedunt duo notissima in Trigonometria plana, quod nimirum radio existente $= 1$ tangens arcus æquatur sinui diviso per cosinum ; & cotangens cosinui diviso per si-

(*) Primum theorema sic facile demonstratur in fig. 43 arcus AB, cujus centrum C habet pro sinu BE pro cosinu CE, pro incremento arcus Bb, pro incremento sinus Db existente angulo BDb recto. Si arcus Bb sit exiguus; assumi poterit triangulum BDb pro rectilinco rectangulo simili CEB : haberi enim poterit angulus CBb pro recto, adeoque angulus DBb erit complementum anguli CBD, nimirum anguli BCE, & idcirco æqualis angulo CBE. Hinc erit $CB = 1 : CE = cos.AB :: Bb : Db = Bb \times cos.AB$

Secunda demonstratur adhuc facilius. Multiplicando $u + du$ per $z + dz$ habetur $uz + zdu + udz + dudz$. Quare incrementum producti erit $zdu + udz + dudz$. Hic postremus terminus est exiguus respectu utriusque præcedentis, cum sit ad primum ut dz ad z, & ad secundum ut du ad u. Quare poterit contemni, & remanebit solum $zdu + udz$.

sinum ; est enim cosinus ad sinum, ut radius ad tangentem, & ut cotangens ad radium : priora illa duo sunt hujusmodi.

. 1°. Si radio existente $= 1$ arcus crescat quantitate exigua ; incrementum sinus æquatur ipsi incremento arcus ducto in cosinum.

2°. Si duo valores u, & z crescant per exiguas quantitates du, dz ; factum uz habebit pro incremento $zdu + udz$.

7. Erit ex formula fundamentali secunda $M\,sin.x = m\,sin.a$, adeoque $dM\,sin.x + Mdx\,cos.x = dm\,sin.a$, & $Mdx = \frac{dm\,sin.a}{cos.x} - \frac{dM\,sin.x}{cos.x} = \frac{dm\,sin.a}{cos.x} - \frac{dM}{cot.x}$. Prima pars ob $sin.a = \frac{M\,sin.x}{m}$ evadit $\frac{Mdm\,sin.x}{m\,cos.x} = \frac{Mdm}{m\,cot.x}$, adeoque $Mdx = \frac{Mdm}{m\,cot.x} - \frac{dM}{cot.x}$. Quod si refractione primi rubei existente r, refractio postremi violacei dicatur $r + dr$; ex formula prima fundamentali erit $dr = dy$, & ex tertia erit $dy\,cos.y = dM\,sin.(b-x) - Mdx\,cos.(b-x)$: adeoque $dr = dy$ erit $= \frac{dM\,sin.(b-x) - Mdx\,cos.(b-x)}{cos.y}$, & $\frac{dr\,cos.y}{cos.(b-x)} = \frac{dM\,sin.(b-x)}{cos.(b-x)} - \frac{Mdx\,cos.(b-x)}{cos.(b-x)} = dM\,tan.(b-x) - Mdx$. Hic secundus valor erat $= \frac{Mdm}{m\,cot.x} - \frac{dM}{cot.x}$. Quare erit $\frac{dr\,cos.y}{cos.(b-x)} = dM\,tan.(b-x) - \frac{Mdm}{m\,cot.x} + \frac{dM}{cot.x}$.

8. Jam vero ubi distractio corrigitur, evadit $dr = 0$ cum toto valore primi membri. Facto igitur & secundo $= 0$, habebitur $\frac{Mdm}{m\,cot.x} = dM\,tan.(b-x) + \frac{dM}{cot.x}$, sive demum $\frac{dm}{dM} = \frac{m}{M} \times (tan.(b-x)\,cot.x + 1)$, quæ est formula numeri 145.

SUP-

SUPPLEMENTUM II.

Constructio veteris vitrometri ex dissertatione veteri prima.

1. Id exhibetur (*) in fig.44 hujus Opusculi, & est totum e laminis metallicis præter bina vitra. ABCD est veluti pavimentum horizontale : EFCI, GHBK sunt bini veluti parietes laterales perpendiculares pavimento : KBCI est paries itidem verticalis fixus posterior : HRPQF est alter paries anterior mobilis circa axem HF : T, S sunt bina vitra terminata planis parallelis bene politis inserta postremis binis parietibus, & ipsis parallela : GE est virga rotunda cum cochlea ad partes E adstringens parietes laterales : MO est cochlea mas circularis habens centrum in medio axe HF inserta cochleæ fœminæ existenti in medio circulo PN, & habenti manubrium cum indice denotante in limbo circuli divisiones, quæ exprimunt partes singularum conversionum indicis ipsius : IX est regula longior adnexa parieti posteriori, tenens sibi afferruminatam fasciam circularem VX habentem centrum in ipso axe HF in F, divisam in gradus incipiendo a distantia Xo proxime æquali distantiæ CF : QY est regula mobilis adnexa parieti mobili RPQ, quæ crenam habet in YZ excipientem eam ipsam fasciam, & habet sibi adnexum vitrum planum politum, quod interiore superficie contingit superficiem ipsius fasciæ circularis. In eadem vitri superficie habetur recta linea YZ, quæ designat gradus contentos in arcu circuli inter ipsam, & initium divisionis o.

2. Intra cavitatem TBS interceptam parietibus infundenda est aqua, quæ ne effluat ad margines parietis mobilis in RH, FQ, ii mar-

(*) Hanc descriptionem, ut & alteram alterius vitrometri aquei, quæ habebitur in supplemento sequenti, promisi in præfatione hujus Opusculi num.6, & in ipso Opusculo itidem num.6., & num. 164.

ii margines sunt obducti corio rite præparato. Ad ipsum præparandum Stephanus Conti, & Nicolaus Narducci Lucenses Patricii, ingeniosissimi viri, & bonarum artium amantissimi, ac in instrumentis etiam per se ipsos perficiendis ad Physicam, & Astronomiam idoneis maxime industrii, cum quibus etiam plurimas institui hujus generis observationes ope prismatum, quæ ipsi mihi elaborarunt egregia sane, & Artifici hoc instrumentum mihi ex meo præscripto paranti adstiterunt dirigentes opus ipsum, adhibuerunt sequentem methodum. Acceptâ unciâ ceræ albæ bonæ, unciâ terebinthinæ Venetæ, semiunciâ olei olivæ, & liquatâ totâ massâ ad ignem, ubi ea ita cœpit refrigescere, ut a digito immerso ejus calor tolerari posset, immissum est corium ita, ut bene imbueretur, tum extractum, & exsiccatum, ac diligenter applicatum ad illa latera. Eo pacto omnis aquæ effluxus est impeditus, relicto libero motu parietis mobilis.

3. Infusâ aquâ, habetur prisma aqueum truncatum, ut patet, cujus angulus refringens est is, quem continerent plana vitrorum S, T producta usque ad concursum: ipsum autem indicat lineola YZ, si initium divisionis o sit rite definitum. Facile est autem id efficere, ut ipsum rite definitum sit. Satis est ope cochleæ PN abducere parietem mobilem RPQ ad parallelismum cum fixo KML, qui parallelismus hoc pacto accuratissime definitur. Directo ope speculi radio solis proxime horizontaliter, quod commode fit ope heliostatæ, notetur ejus locus in pariete opposito, dum libere transit, tum interposito instrumento ita, ut debeat transire per vitra T, S, & aquam intermediam, moveatur index PN, donec radius transmissus eodem redeat omni refractione destructa. In eo situ ita collocetur vitrum YZ, ut lineola transeat per illud initium divisionis o, & in eo situ adnectatur cursori QY, qui deinde rite denotabit angulum refringentem aquæ per eandem lineolam. Ipsa autem lineola ducenda fuit in plano tangente superficiem fasciæ circularis ad evitandam omnem parallaxim, quæ haberetur, si ea distaret a superficie, & oculus deflecteretur a directione perpendiculari.

4. Si vitrum jam esset adnexum; satis esset in positione paralle-

rallelismi inventa per methodum traditam notare distantiam lineolæ a puncto o, quæ rectificationem instrumenti exhiberet, addendam arcui in aliis positionibus designato, vel subtrahendam; prout in casu parallelismi jaceret ipsa lineola respectu o ad partes X, vel ad partes V.

5. Eadem methodo liceret etiam investigare; an vitra S, T re ipsa essent terminata planis parallelis, ut accurata instrumenti constructio requirit, an secus: nimirum ante infusionem aquæ traducendus esset radius per ipsa vitra, quo abeunte ad eundem locum, ad quem abit sine instrumento, haberetur ipsius parallelismi indicium: nam si alio abiret radius; certo inde deduceretur, haberi aliquam superficierum alterius vitri, vel utriusque inclinationem ad aliam quampiam. Rectificatio habita per destructionem refractionis post aquam infusam corrigeret pro pluribus observationibus ejusmodi inclinationis effectum, ubi ea exigua esset: sed ad instrumenti perfectionem habendam, oporteret vitra ad parallelismum adducere, quem an assecuta fuerint, facile definietur ante, quam aptentur ipsi machinæ, transmittendo radium solis per ipsa singula, & videndo, an ipsum quidquam de sua directione detorqueant.

6. Divisionibus fasciæ circularis XV exhibentibus numerum graduum anguli cujusvis, facile minuta obtineri poterunt ope divisionum circuli PN, notando nimirum, quot particulæ desint usque ad finem gradus, si ad datam positionem deventum est augendo angulum, vel usque ad initium, si minuendo, comperto semel, quot particulæ debeantur uni gradui. Nimirum illa divisio circuli PN cum motu indicis idem præstat, quod in communibus instrumeutis micrometrum.

7. Multo tutius minuta haberi possunt, adnectendo regulæ QY in Y arcum plurium graduum divisum in particulas singulis minutis majores, vel minores integro gradu, nimirum efformando eum, quem nonium appellant Geometræ, qui non est obnoxius inæqualitatibus motuum, quarum est summum periculum in cochlea, potissimum in hac fœmina, quæ ob arcus curvaturam non potest esse ita longa, ut plures habeat spiras. Tum vero inuti-

lis est divisio circuli PN, & index; sed cochlea adhuc est necessaria ad habendum motum plani RPQ lentum, & continuum, qui sine cochlea haberetur per saltus.

8. Ut possit institui examen divisionis fasciæ XV, ego quidem illud curavi, ut axiculus HF promineret ad partes F cum centro circuli XV ibi notato. Tum enim facile accipitur radius ejus circuli, & fieri potest ejus scala divisa ope transversalium in partes 1000: tum vel ejus ope, vel ope circini proportionis accurati facile est videre, an singulæ chordæ incipiendo ab o contineant numerum particularum, cui respondere debet ex tabula sinuum duplum sinus dimidii arcus, & si id minus accidat, invenire correctionem (*).

(*) Quoniam per fascias adnexas binis regulis cum nonio multo accuratior haberi potest determinatio minutorum, quam per cochleam virgæ circularis, quæ admodum difficulter ita perfici potest, ut motum præbeat æquabilem; multo melius est illam supprimere, idque eo magis, quod ope illius, uti est in ipso instrumento hic proposito, haberi non potest mutatio anguli, nisi per motum lentum, quod est maxime incommodum, ubi mutatio debet fieri ingens, ut ubi a determinatione vis refractivæ transitur ad determinationem distractivæ, vel ab usu unius prismatis ad usum alterius. Facile autem præstari potest motus lentus per virgam rectilineam transeuntem per tubulos cavos adnexos parietibus R, & K ita, ut gyrare possint circa axiculos, & se invicem semper respicere, quorum alter esset cochleatus ipse, & alter haberet cochleam lateralem prementem, quæ locum præberet motui tam celeri, quam lento, methodo simili ei, quæ habetur in instrumento hujus Opusculi. Sed præstabit adhibere pro vitrometro aqueo formam, quæ habebitur hic in supplemento sequenti.

SUP-

SUPPLEMENTUM III.

Descriptio vitrometri aquei exhibentis angulos aqueos variabiles ampliores componendos cum angulis prismatum vitreorum majoribus.

1. FIGURÆ 45, & 46 exhibent binas thecas cylindricas clausas inferne per basim circularem horizontalem, & apertas superne, quarum posterior debet immitti intra priorem paullo altiorem ita, ut basis, & latera ipsius exacte applicentur basi, & lateribus illius, & excursum aquæ inter superficies applicatas prorsus impediat: earum altitudines possent fieri æquales; sed præstabit efficere priorem paullo altiorem: figuræ non exprimunt crassitudines laminarum, ex quibus constat machinula, sed solas superficies, quæ debent congruere. Singularum basi adnexa est sua regula AB cum fascia habente arcus circulares, quorum centrum est C idem, ac centrum basis, cum divisionibus idoneis ad determinanda minuta angulorum methodo notissima Nonii, vel Vernerii.

2. Theca exterior (fig. 45) ex parte opposita puncto A habet in superficie cylindrica verticali aperturam FF'G'G terminatam binis arcubus circularibus FF', GG' parum distantibus a fundo, & a vertice ipsius superficiei cylindricæ, & binis rectis verticalibus FG, F'G' factam in parte opposita regulæ ferentis fasciam: huic aperturæ adnexus est canalis apertus superne in GG'I'I habens basim FF'H'H horizontalem, nonnihil elevatam supra basim circularem thecæ ita, ut infra ipsam possit libere moveri in gyrum basis circularis thecæ figuræ 46: quamobrem is canalis adnectendus est superficiei cylindricæ in GFF'G' post immissionem thecæ secundæ intra primam. Facies canalis HH'I'I opposita aperturæ FG' debet esse plana verticalis, & aperta ita, ut excipiat per modum cujusdam veluti fenestræ vitrum terminatum binis superficiebus planis parallelis bene politis, per quod transmitti possit radius introductus in canalem per aperturam FG'. Basis FF'H'H ipsius canalis debet habere adnexam mensulam KK'L'L

hori-

horizontalem ampliorem, quæ potest excindi simul cum ipsa basi FF'H'H ex eadem lamina ampliore ita, ut sit procursus quidam ipsius basis FH' extra canalem: hæc mensula debet itidem esse nonnihil elevata supra basim circularem thecæ, ut basis canalis, cui conjungitur: ipsa debet sustinere exiguum prisma vitreum, cujus alterum latus applicatum laminæ vitreæ HI' debet excipere radium luminis per ipsam traductum. Superficies cylindrica figuræ 45 debet habere aperturam aliam MM'N'N diametraliter oppositam priori multo ampliorem, quæ pertingat inferne in MM' usque ad basim: sed ex parte superiore extabit supra arcum NN' pars ipsius superficiei cylindricæ ad majorem firmitatem: ipse arcus NN' poterit fieri ita, ut habeat circiter eandem elevationem supra basim thecæ, quam latus superius laminæ vitreæ verticalis faciei HI'.

3. Theca figuræ 46 immittenda in thecam figuræ 45 debet habere itidem ex parte opposita puncto A in superficie cylindrica aperturam OO'P'P similem aperturæ figuræ 45, sed multo ampliorem, terminatam binis lateribus rectilineis OP, O'P', & arcubus circularibus OO', PP', ac ex parte A aliam HH'I'I terminatam binis lateribus rectilineis HI, H'I', arcu baseos HAH', & arcu circulari I*a*I', supra quem extet pars superficiei cylindricæ ad majorem firmitatem: debet autem lateribus metallicis HH'I'I bene adnexis ipsi superficiei cylindricæ, & basi contineri lamina vitrea itidem amplior terminata binis superficiebus planis, & bene politis. Quoniam hæc theca debet immitti intra alteram figuræ 45, ut illi debet adnecti canalis post hujus immissionem, ita huic debet post ipsam immissionem adnecti regula AB. Fieri poterit hic nexus per procursum regulæ ipsius citra A usque ad latus HH', ubi basi adnectetur per binas cochleas, ut per similem procursum ultra B adnecti poterit ope cochlearum eadem regula fasciæ DE. Sic superficies inferior ejusdem fasciæ poterit respondere superficiei inferiori basis thecæ secundæ, quæ cum congruat cum superficie superiore baseos thecæ primæ, poterit ita adnecti fascia ejusdem figuræ 45 regulæ AB, & binis transversalibus per cochleas, ut ambæ superficies illius respon-

deant

deant ambabus superficiebus hujus. Tum vero si divisio fasciæ figuræ 45 fiat in parte ipsius interiore, & divisio fasciæ figuræ 46 in exteriore, ultimo circulo hujus congruente cum primo illius; habebitur ex congruentia divisionum mensura angulorum.

4. Fascia figuræ 46 poterit habere 29 gradus divisos in 30 partes, quo pacto singula intervalla deficient a singulis gradibus per duo minuta: & si tam ea intervalla, quam gradus fasciæ figuræ 45 subdividantur bifariam; habebuntur intervalla nova nonii ipsius figuræ 46 deficientia ab intervallis figuræ 45 per singula minuta, quod exhibebit angulorum singulorum mensuram in gradibus, & minutis. Quinimmo habebitur duplex nonius, binis divisionibus congruentibus simul: eæ distabunt a se invicem per 30 minuta, quarum altera exhibebit excessum minutorum supra gradus integros, altera supra dimidios. Id vero determinationem utramque confirmabit per consensum, vel minuet exiguum aliquem divisionum errorem assumpto medio.

5. Amplitudo fasciæ figuræ 45 determinabitur considerando inclinationem maximam, quam in usu hujus instrumenti habere poterit lamina vitrea figuræ 46 ad laminam vitream figuræ 45, quam inclinationem appellabimus angulum instrumenti: consideratio ejus anguli determinabit aperturas superficierum cylindricarum. Habebitur hic etiam, ut in illo vitrometro aqueo præcedenti, prisma vitreum anguli fixi impositum mensulæ KL' figuræ 45, in quod incidet ad perpendiculum radius traductus per canalem, & ejus laminam vitream, cum prismate aqueo anguli variabilis contento inter secundam superficiem ipsius prismatis vitrei, & laminam vitream HI' figuræ 46.

6. Aqua infusa in thecam interiorem positam intra exteriorem non poterit effluere, nisi apertura OP' illius in conversione circa centrum baseos deveniat ad aperturam MN' hujus, ut patet: ea aperturarum conjunctio timeri non poterit; nisi apertura MN' figuræ 45, & OP' figuræ 46 sint nimis magnæ. Sed hæc posterior non potest fieri nimis exigua, ne latus OP incurrat in latus FG figuræ 45, vel O'P' illius in F'G' hujus post conversionem nimis exiguam, quæ nimirum exhibeat nimis exiguam inclinatio-

nem

nem laminarum vitrearum. Pariter apertura MN' figuræ 45 non potest fieri nimis exigua, ne superficies cylindrica non satis aperta impediat liberum egressum radii appellentis ad laminam vitream figuræ 46. Apertura quoque FG' figuræ 45 debet habere amplitudinem non quidem ingentem, sed tamen aliquam, ad excipiendum radium. Ea omnia comparari debent, & combinari ita, ut instrumentum evadat, quam maxime fieri potest idoneum ad observationes instituendas, quæ utilissimæ sint.

7. Cum angulus instrumenti, quem continent directiones laminarum vitrearum utriusque figuræ, est contrarius angulo prismatis vitrei; eorum angulorum summa est angulus prismatis aquei, quod patebit inferius: angulus autem hujus prismatis aquei debet esse multo major angulo vitrei, ut possit destruere ejus effectum in ordine ad refractionem, & distractionem, & efficere integram inversionem spectri; potissimum si prisma vitreum sit e strass, vel flint: adeoque requiritur ejusmodi constructio instrumenti, ut conversio thecæ interioris fieri possit quam maxima combinari potest cum iis conditionibus laterum OP, O'P' figuræ 46 nec procurrentium ultra latera MN, M'N' figuræ 45, nec incurrentium in ejus latera FG, F'G', & aperturæ MN' figuræ 45 satis magnæ, ac aperturæ FG' non nimis exiguæ. Quo major obtineri poterit ea additio anguli, quem efficiunt directiones laminarum vitrearum, ad angulum prismatis vitrei; eo majoris anguli prisma vitreum adhiberi poterit ad integram inversionem spectri, quæ idcirco eo fiet lentius, & eo evidentiorem præbebit oculo unionem colorum successivam.

8. Ut melius pateat, quid fieri oporteat, consideretur via radii traducti trans instrumentum. Sit in (*) figura 47 KK'L'L mensula eadem, quæ in figura 45, BAC prisma vitreum ipsi im-

(*) Figura est aptata casui, in quo conversio thecæ interioris fiat a parallelismo laminarum vitrearum ita, ut angulus prismatis vitrei sit oppositus angulo instrumenti, quod reddit angulum aqueum æqualem eorum summæ, ut jam demonstrabitur, & requiritur ad correctionem refractionis, & distractionis ab ipso inductæ. Si motus fieret in partem oppositam; haberetur diffe-

impositum, HH' lamina vitrea figuræ 46 cum directione ita inclinata ad directionem lineæ KK', quæ est eadem, ac directio laminæ vitreæ figuræ 45, ut earum concursus exhibeat in V angulum oppositum angulo A prismatis vitrei, cujus latus AC productum occurrat eidem directioni HH' in T. Angulus ATH erit angulus prismatis aquei: is erit æqualis summæ angulorum internorum, & oppositorum V, & A, quorum prior est angulus instrumenti, posterior angulus prismatis vitrei; unde patet id, quod affirmavimus numero superiore.

9. Si radius intra canalem deferatur ad prisma vitreum per lineam SD perpendicularem ejus faciei primæ AB, progredietur rectâ usque ad secundam in E: tum relicta continuatione EG ejus directionis, recedet magis a perpendiculo EI per EN ob vim refractivam vitri majorem vi aquæ, per quam progredietur usque ad laminam vitream HH', quam hic exprimemus per unicam lineam, neglecta exigua ejus crassitudine: id licebit ob parallelismum superficierum, quo fit, ut radius progrediatur, vel regrediatur reflexus in totum ob nimiam obliquitatem, prorsus ac si transiret immediate ex aqua in aerem. In casu progressùs, relicta continuatione viæ præcedentis per NP recedit itidem a perpendiculo NQ per NR.

10. Porro illud hic in primis notandum est, inclinationem laminæ HH' evadere inutilem; si ejus obliquitas ad radium EN evadit tanta, ut is radius debeat reflecti in totum: id autem accidet, cum sinus anguli QNP, sive cosinus anguli PNH, vel ENH' fuerit major quam $\frac{3}{4} = 0,75$, nimirum ille prior angulus major quam 48°. 36', hic posterior minor quam 41°. 24'. Nam QNP est æqualis angulo incidentiæ, QNR angulus refractus, adeoque sinus illius ad sinum hujus debet esse, ut est si-

differentia pro summa. Angulus autem vitreus potest collocari versus partem utramvis, prout requiret positio muri excipientis spectrum respectu fenestræ transmittentis radium; debet enim spectrum pro lenta inversione, quæ habetur in combinatione prismatis e flint cum aqua, abire versus eam partem, versus quam jacet cuspis ejus anguli respectu hiatus.

nus anguli refracti in transitu ex aere in aquam ad sinum anguli incidentiæ, quæ ratio in aqua communi est circiter ut 3 ad 4; unde fit, ut si sinus anguli QNP sit major quam $\frac{3}{4}$; sinus anguli QNR debeat esse major sinu toto, quod eum angulum reddit impossibilem, adeoque impedit egressum radii, qui idcirco debet reflecti in totum. Revera illa ratio non est accurate eadem pro omni radiorum genere, nec usquam fortasse est accurate 3 ad 4. Sed hic satis est assumere determinationem veræ proximam.

11. Si instrumentum adhiberi debeat pro habendo solo prismate aqueo; amplitudo arcus HAH' figuræ 46 major gradibus 100 esset superflua. Nam in positione laminarum parallelarum punctum A figuræ 46 congruit cum puncto A figuræ 45: tum si in conversione thecæ interioris punctum H hujus adveniat prope punctum A exterioris ad distantiam 1°. 24'; inclinatio laminarum, quæ determinat angulum aqueum, erit $= 50° - 1°. 24' = 48°. 36'$, in eo casu, in quo arcus HH' figuræ 46 est graduum 100, qui reddit motum ab H hujus thecæ usque ad A illius $= 50°$. Tum vero radius delatus per canalem figuræ 45 directione perpendiculari ad ejus laminam vitream HI' deveniet ad laminam vitream figuræ 46, evitando partem metallicam procurrentem in HI, quæ continet laminam vitream, & tegit ejus partem marginalem oblongam, & arctam; si ea pars metallica habet latitudinem exiguam, ut debet: quin immo si ea est paullo latior; adhuc fieri potest, ut is radius deveniat ad id vitrum, efficiendo, ut ingrediatur nonnihil versus latus aperturæ canalis oppositum puncto H. Ibi autem is radius continebit cum linea perpendiculari eidem laminæ vitreæ angulum $= 48°. 36'$, qui est ultimus terminus radiorum egredientium. Si inclinatio esset major; radius reflecteretur in totum: hinc si amplitudo arcus HAH' figuræ 46 esset major 100 gradibus; pars laminæ vitreæ esset inutilis, inductâ ea inclinatione ante appulsum puncti H ad A, & inclinatione ulteriore inducente angulum cum perpendiculo majorem eo, qui permittit transitum.

12. Ea magnitudo arcus HAH' erit satis commoda etiam pro observationibus, in quibus adhibebitur prisma vitreum. Arcus FF' figu-

figuræ 45 fieri poterit graduum 20, ne apertura canalis sit nimis arcta: tum vero arcus OO' debebit esse $= 120°$; nam iis 20° debebunt addi utrinque 50°, ut, facta ex parte utravis conversione per gradus 50, linea OP, vel O'P' thecæ interioris non incurrat in lineam FG, vel F'G' exterioris. Porro etiam arcus MAM' figuræ 45 debebit esse graduum 100, ne regula AQ figuræ 46 in conversione eâdem incurrat in latus MN, vel M'N' figuræ 45. Sit jam in figura 45 punctum A' diametraliter oppositum puncto A, & arcus A'O, A'O' singuli graduum 60, ut OO' sit ibi $= 120°$, veluti in figura 46: relinquetur arcus $OM = 180° - A'O - AM = 180° - 60° - 50° = 70°$. Quare facta conversione thecæ interioris per 50°, ut punctum H figuræ 46 abeat in A figuræ 45, adhuc linea HI illius distabit a linea MN hujus per gradus 20, congruentibus per id intervallum superficiebus cylindricis binarum thecarum ad impediendum effluxum aquæ per aperturas nondum congruentes.

13. Pro casu prismatis vitrei adhibiti ad observationem posset haberi adhuc major inclinatio laminarum vitrearum sine reflexione in totum; quia si in figura 47 punctum G sit in linea H'H; angulus ENH' erit major angulo EGH' per angulum NEG, qui est refractio prismatis vitrei: verum is excessus est exiguus ob vim refractivam exiguam in egressu e vitro in aquam: aliunde necessitas impediendi effluxum aquæ vix permittit ullum additamentum arcubus AH, AH' figuræ 46, quod in figura 45 augeret tantundem arcus AM, AO, & excursum lineæ OP figuræ 46 versus MN figuræ 45, relicto arcu nimis exiguo pro impediendo effluxu aquæ inter eas lineas. Intervallum saltem decem graduum apparebit adhuc magis necessarium, si consideretur necessitas crenæ excavandæ in superficie cylindrica figuræ 45 prope basim ultra M, & M' crassitudinis æqualis crassitudini regulæ AB figuræ 46, & longitudinis æqualis dimidiæ latitudini ejusdem regulæ ad eam excipiendam, ubi punctum A ejusdem figuræ 46 situm in media ea latitudine debet advenire ad punctum M, vel M' figuræ 45, ut punctum H', vel H illius adveniat ad punctum A hujus.

 14. Hinc

14. Hinc in constructione hujus instrumenti retineri poterunt mensuræ propositæ pro aperturis. In figura 45 fiet apertura FF' graduum 20, MM' = 100, cum crena ad basim habente altitudinem æqualem crassitudini regulæ AB figuræ 46, & longitudinem æqualem dimidiæ ejus latitudini. In figura 46 apertura HAH' fiet = 100°, OO' = 120°. Reliquæ dimensiones omnes sunt arbitrariæ, ut magnitudo basis, & altitudinis utriusque thecæ: basis non debebit esse nimis exigua, ne apertura FF' figuræ 45 graduum 20 sit nimis arcta: nec vero nimis magna esse debet ea basis, ne instrumentum evadat nimis onerosum, & incommodum, & vero etiam pretii majoris necessario. Si fiat diameter basis thecæ exterioris pollicum trium; arcus FF', qui cum sit graduum 20, debet esse paullo major triente radii, sive sextante diametri, erit paullo major dimidio pollice, quod sufficit ad liberum ingressum radii, & progressum per canalem, ac regressum, ut facile videri possit reditus ipsius radii ad foraminulum, per quod ipse admittitur in conclave, a quo reditu pendet incidentia perpendicularis in laminam vitream HI'. Diameter pollicum duorum adhuc sufficeret, quæ admittit aperturam paullo majorem lineis 4; nam id foraminulum habet diametrum minorem binis lineis: verum apertura paullo major erit commodior.

15. Theca amplior vitaret necessitatem regularum, & fasciarum: posset enim fieri divisio graduum in ipsa superficie exteriore cylindrica thecæ figuræ 45 paullo infra verticem, & adnecti nonius thecæ interiori per lamellam plicatam supra verticem ipsius illius superficiei. Sed & ejusmodi divisio in superficie convexa est nimis incommoda, & nimis magna requireretur amplitudo ad habendam commodam determinationem minutorum ope nonii. Longitudo regularum, & latitudo fasciarum sunt itidem arbitrariæ. Radius circuli communis, qui debet esse intimus figuræ 45, & extimus figuræ 46, fieri potest pollicum 8, vel etiam tantummodo 6, quæ magnitudo sufficit pro distinctione nonii. Arcus DBE figuræ 46 debet esse paullo amplior gradibus 29, ut procurrat nonnihil utrinque ultra postremas lineolas arcus divisi in partes 30 pro habendis binis minutis, vel potius 60 pro haben-

habendis singulis per determinationem duplicem, quo pacto eæ lineolæ extremæ comparandæ cum lineolis figuræ 45 erunt magis distinctæ. Arcus figuræ 45 debet esse paullo major gradibus 129. Is exiguus excessus reddet itidem magis distinctas lineolas extremas; gradus autem 100 requiruntur, ut habeatur utrinque excursus puncti medii B figuræ 46 per gradus 50, quos assumpsimus pro conversione, quibus accedere debent utrinque $14\frac{1}{2}$ pro nonii integri concursu cum divisionibus arcus exterioris in gradus, quod addit gradus 29 iis 100.

16. Ut planum fasciæ interioris bene congruat cum plano exterioris, poterit adnecti per cochleas suæ regulæ illa inferne, hæc superne, quo pacto planum ipsarum inferius erit idem cum eo, in quo se mutuo contingunt bases binarum thecarum. Et quidem ad majorem firmitatem regula figuræ 46 potest procurrere supra fasciam in Q prope circulum penultimum, non autem penitus usque ad ipsum, ne tegat omnem procursum lineolæ mediæ divisionis nonii, cujus divisionis lineolæ omnes debent produci de more post denas partes usque ad circulum antepenultimum, & post quinas usque ad medium intervallum inter ipsum, & penultimum, ut melius incurrant in oculos. Satis erunt ibi binæ cochleæ in Q, & totidem in Q' prope A, ubi ea regula poterit procurrere supra basim usque ad laminam HH'. Possent autem etiam ad majorem firmitatem afferruminari hinc, & inde a capite Q' regulæ ferentis nonium aliæ binæ regulæ breves basi thecæ ad distantiam a se invicem æqualem latitudini illius, quarum intervallum excipiat ipsum caput Q', & tutius contineat, ne illa arrepta prope fasciam ad convertendam thecam interiorem, possit inclinari ne tantillum quidem in latus respectu basis ipsius. Eæ regulæ breves non debent procurrere quidquam ultra basim, ne impediant immissionem thecæ interioris intra exteriorem, quæ immissio cogit eum modum adnectendi regulam longiorem per cochleas, ut nimirum adnexio fiat post immissionem.

17. Posset quidem ea regula afferruminari ipsi basi, excavatâ penitus aperturâ MN' figuræ 45 usque ad verticem superficiei cylin-

cylindricæ ita, ut nihil solidi remaneat supra arcum NN', quo pacto regula QQ' figuræ 46 immissionem non impediret: sed illa pars superficiei cylindricæ extans præstabit firmitatem majorem. Ob eandem rationem majoris firmitatis, laminæ vitreæ utriusque figuræ delineatæ sunt ita, ut supra ipsas extet pars laminæ metallicæ tanquam regula quædam in II': posset enim ibidem haberi limes superior per solum marginem laminæ vitreæ. Ipsa lamina vitrea debet utrobique adnecti laminæ metallicæ per aliquod genus materiæ tenacis, quod præstet adhæsionem satis firmam, quæ non possit dissolvi ab aqua, & ipsius aquæ fluxum impediat intra canalem in figura 45, & versus Q' in figura 46, vel claudi inter binas laminas metallicas perforatas, quarum utraque sit excavata in omni margine per dimidiam crassitudinem laminæ vitreæ ad excipiendos ejus margines: interior esset afferruminata margini canalis, vel basi in HH', & lateribus superficiei cylindricæ in II', exterior adnexa interiori per cochleas contineret laminam vitream ipsi fortiter inclusam ita, ut omnis effluxus aquæ impediatur, ne habeatur periculum dissolutionis glutinis, quo lamina vitrea adnecteretur lateribus metallicæ perforatæ ipsi tantummodo applicatæ, quæ adnexio nunquam esset satis firma.

18. Regula figuræ 45 habens fasciam sibi adnexam, potest excindi ex eadem lamina metallica cum basi illius thecæ: adjectæ sunt binæ aliæ regulæ transversales ad habendam firmitatem positionis fasciæ ipsius, quæ cum sit nimis longa, male sustineretur per solas binas cochleas regulæ intermediæ. Binæ regulæ transversales, nisi excindantur & ipsæ ex eadem lamina metallica cum regula intermedia, poterunt ipsi afferruminari efficiendo, ut earum capita excavata per dimidiam crassitudinem procurrant intra cavitatem ipsius excavatæ itidem per crassitudinem dimidiam. Si regula ipsa QQ' figuræ 45 non excindatur ex eadem lamina cum basi thecæ; poterit eodem pacto ipsi afferruminari in Q', capite itidem excavato per dimidiam crassitudinem, & producto intra ipsam pariter excavatam ita, ut superficies superiores utriusque remaneant in eodem plano. Fasciarum figuræ utriusque latitudo est arbitraria; dummodo sit satis ampla ad excipiendam divisio-

nem,

nem, & supersit ultra ipsam intervallum satis amplum pro cochleis. Debet omnino caveri, ut ipsarum superficies superiores sint in eodem plano, ut radius circuli extimi interioris, & intimi exterioris sit prorsus ejusdem magnitudinis, ut nimirum fascia interior bene congruat cum exteriore, quod est necessarium ad hoc, ut bene dignoscatur congruentia lineolarum, ex qua pendet effectus nonii.

19. Longitudo canalis figuræ 45, & magnitudo mensulæ KL ipsi adnexæ sunt itidem arbitrariæ; dummodo anguli L, L' non ita procurrant, ut impediant liberum transitum lineæ HH' figuræ 46 ultra ipsos. Posset utique etiam evitari penitus is canalis, adnexâ laminâ vitreâ ipsi fenestræ FG' (fig. 45) excavatæ in superficie cylindrica cum mensula KL' afferruminata eidem superficiei infra vitrum. Adjectus est canalis tantummodo ad diminuendam longitudinem itineris radii per aquam, quæ eo majorem ejus partem intercipit, quo via est longior. Altitudo arcus FF' fig. 45 est arbitraria, dummodo arcus OO' fig. 46 remaneat infra fundum canalis, ut nimirum theca interior possit libere converti infra ipsum canalem. Mensula KL' debet omnino esse elevata supra basim thecæ interioris, ut nimirum prisma vitreum ipsi impositum remaneat immotum, dum ea theca convertitur ad variandam inclinationem mutuam laminarum vitrearum, sive anguli prismatis aquei.

20. Cum canalis debeat firmiter adnecti laminæ cylindricæ thecæ exterioris post immissionem interioris; poterit utique afferruminari in ipsis lateribus, GF, FF', F'G': sed poterunt etiam ipsi adnecti excursus laterum FI, F'I' plicati in FG, F'G', & redacti ad formam cylindricam, ut applicati post immissionem superficiei internæ adnectantur ipsi singuli per binas cochleas: excursus aquæ in FF' impedietur facile vel per accuratum contactum, vel cerâ, aut alio genere glutinis quocumque, quod ab aqua dissolvi non possit.

21. Hoc vitrometri aquei genus præstabit illi priori ex pluribus capitibus. Ibi apertura anguli prismatis aquei spectabat sursum, vertice posito in infimo loco: hinc motus spectri per murum

rum oppositum erat verticalis, & in inversione remanebat ipsum spectrum ita elevatum, ut ad bene perspiciendam omnem phænomenorum seriem opus esset scala: hìc is motus est horizontalis ob positionem diversam anguli ipsius inductam a motu thecæ interioris horizontali. Ibi aperto angulo aqua descendebat ita, ob auctum hiatum, ut opus esset aliquando aliam affundere, ne prisma vitreum remaneret extra aquam, & eo imminuto ita ascendebat, ut etiam effflueret: nisi pars exhauriretur: hìc ea remanet semper ad eandem altitudinem. Ibi erat admodum difficile impedire aliquem effluxum aquæ tam hinc, & inde ad margines lateris mobilis perradentis plana lateralia fixa, quam, & multo magis, in fundo circa axem conversionis, quod hìc præstatur accuratius per superficies binarum thecarum bene tornatas, & levigatas. Sed, quod caput est, ibi angulus instrumenti non poterat satis augeri, ne aqua effflueret: hìc is augetur usque ad 50 gradus. Ibi potuisset augeri angulus reddendo mobilia bina latera opposita, sed motus alterius lateris esset inutilis pro observationibus relativis ad meas formulas: nam eæ requirunt ingressum radii perpendicularem in laminam vitream, cui applicatur prisma vitreum, ad quem usum est prorsus inopportuna inclinatio lateris ferentis eam laminam: dum hìc ejus positio verticalis opposita foraminulo transmittenti radium est maxime idonea ad eam rem.

22. Accedit ibi aliud ingens incommodum motus lentissimi pro augendo, & minuendo angulo per cochleam circularem, quæ itidem evasit mihi inutilis pro determinatione minutorum: est enim admodum difficile ita parare cochleam incurvam, ut motus remaneat æquabilis, & indiculus in conversione determinet accurate progressum circularem lateris mobilis. Posset quidem etiam ibi res parari longe aliter, & præstari motus jam celer, jam lentus ad arbitrium per cochleam rectam, ut in instrumento hujus Opusculi, & determinatio minutorum posset etiam ibi præstari per nonium affixum ei virgæ, quæ ibi fert lineolam determinantem gradus. Hìc id quidem præstatur per nonium, & res evadit commodior fasciis habentibus positionem horizontalem. Motus ingens celer hìc habetur commodissime, apprehensâ digi-

tis

tis manus alterius regulâ figuræ 46 prope fasciam, & appressâ digitis alterius thecâ exteriore ad planum, cui innititur, quam ob causam erit opportunum illud, quod monuimus num. 1, præstare videlicet, ut fiat theca exterior paullo elevatior: sic enim dum vertex ejus superficiei cylindricæ apprimitur digitis versus planum sustinens basim, non impedietur liber motus circularis thecæ interioris.

23. Poterit sane præstari etiam motus admodum lentus urgendo regulam thecæ interioris superficie unguis inclinata jam magis, jam minus per inclinationem digiti, cujus caput innitatur ipsi plano sustinenti vitrometrum. Ea inclinatione promovetur ea regula motu quantumlibet lento. Verum posset hìc etiam adhiberi machinula similis ei, quæ adhibita est in instrumento hujus Opusculi. Cylindrus brevis cavus ut ibi, vel parallelepipedum cavum adnecteretur regulæ AB figuræ 46 in distantia arbitraria a puncto A, ut duorum pollicum, ita, ut converti possit in gyrum: is haberet sibi adnexam cochleam prementem, quæ urgeret cylindrum, vel parallelepipedum solidum satis longum tum, cum debet impediri ejus excursus intra cavum ad inducendum motum lentum: is induceretur, ut in eodem instrumento, per aliam cochleam, quæ urgeret caput ipsius cylindri solidi desinens in parallelepipedum immissum in aliud breve cavum. Hoc secundum cavum ibi est affixum alteri e binis cruribus illius veluti circini proportionis, dum præcedens affixum est alteri. Hìc illud secundum non potest affigi regulæ figuræ 45; quia tum conversio fieri non posset in partem utramque: sed potest adnecti superficiei cylindricæ exteriori versus fundum alia regula brevior, cui affigatur hoc secundum cavum ad eandem distantiam a centro basis, ad quam illud primum est adnexum alteri regulæ mobili.

24. Id indicabimus tantummodo in figura 48: MAM' est idem arcus baseos thecæ exterioris, qui in figura 45, cum initio ultra A ejus regulæ: HH' est recta eadem, quæ in figura 46 cum parte Q'Q regulæ adnexæ basi thecæ interioris: huic adnectitur cylindrus cavus, vel potius parallelepipedum cavum BC, quod adhibebimus in posterum loco cylindri, per axiculum responden-

tem puncto medio L, inferne procurrentem ex ipso cylindro, & immissum in foraminulum excavatum in ipsa regula, circa quem axiculum ipse cylindrus libere converti poterit, ut in ipso instrumento hujus Opusculi: id autem habebit cochleam prementem I, ut ibi. Regula brevior OP adnectitur in O superficiei externæ thecæ exterioris, vel ejus basi ultra M', & ipsi regulæ per similem axiculum respondentem puncto N, parallelepipedum cavum DE habens cochleam solidam K, quæ ingreditur in cavam capitis N parallelepipedi solidi NG immissi in cavum DE, & transeuntis per alterum cavum BC. Id parallelepipedum debet habere longitudinem fere sesquialteram distantiæ puncti L a centro basis. Ipso compresso per cochleam I, & promoto per cochleam K, debet lente promoveri regula Q'Q cum suo nonio, & cum lamina vitrea HH' ipsi adnexa. Retractâ autem cochleâ I, potest regula eadem moveri motu quantumlibet magno per liberum excursum parallelepipedi NG intra parallelepipedum BC.

25. Potest motus lentus induci methodo adhuc multo simpliciore. Sit in figura 49 AB lamina cylindrica thecæ superioris, CD ea, quæ pertinet ad interiorem, paullo depressior in C. Hæc posterior fieri potest alicubi dentata per gradus 50, ut in E. Per foramen excavatum infra A traducatur axiculus FG habens manubrium in F, & cochleatus in parte, quæ extat versus partem dentatam C. Lenta conversione manubrii F habebitur motus lentus thecæ interioris: nec vero impedietur motus celer; si foramen infra A sit tantillo amplius crassitudine axiculi: apprehensâ enim digitis regulâ QQ' figuræ 46 prope fasciam, fiet haud difficulter motus in gyrum non ita lentus, quo nimirum axiculus ipse cum manubrio convertetur motu celeri per plures etiam integras conversiones. Sed motus celer inducetur multo facilius; si in lamina cylindrica AB figuræ 49 fiat crena, cujus faciem externam in figura 50 exhibet PII'P', in quam immittatur pars AHH'A' ipsi respondens, quæ secum feret totum cylindrum FG figuræ 49 cum suo manubrio F. Hac immissa ita, ut HH' figuræ 50 descendat usque ad II', habebitur motus lentus, cochlea promovente dentes thecæ interioris: sed hac ipsa apprehensa digitis,

gitis, & elevata, habebitur motus celer facilis, dentibus jam libere excurrentibus infra cochleam elevatam supra ipsos. Locus idoneus pro dentibus thecæ interioris erit ab I figuræ 46 versus P ad dexteram aspicientis directione BA, ut observator, qui debet manere ex parte fasciarum ob aperturam canalis figuræ 45 obversam fenestræ, possit facilius manu dextera movere in gyrum axiculum F figuræ 49 collocandum supra medium arcus dentati, vel elevare partem AH' figuræ 50 pro motu celeri, dum manu altera movet in gyrum regulam figuræ 46.

26. Quæ huc usque sunt exposita, pertinent ad constructionem instrumenti: usus est idem, ac prioris vitrometri: poterunt comparari cum aqua diversa genera vitrorum ad eruendas ipsorum vires refractivas, & dispersivas, vel distractivas: præstabit autem hoc novum idcirco potissimum, quod poterunt adhiberi prismata angulorum majorum; cum nimirum angulus instrumenti possit augeri usque ad gradus 50, qui additus angulo prismatis vitrei reddet aqueum tanto majorem: & quo majores sunt anguli, eo iidem errores admissi in eorum mensura reddunt minus erronea consectaria. Verum adhuc ad eum usum est magis idoneum instrumentum hujus Opusculi habens prisma variabile vitreum: nam vis illius vitri, cum quo reliqua sunt comparanda, est semper constans; dum aqua variabilem habere potest vim ob diversa substantiarum immixtarum genera. Hinc vis refractiva semel deprehensa in vitro anguli variabilis per observationes, quæ pro ea determinatione sunt multo complicatiores, retineri potest semper, & ubique; dum ad accurationem majorem pro vi aquæ oporteret easdem observationes repetere, quotiescumque novum genus aquæ adhibetur: vis enim refractiva prismatis variabilis est necessaria ad eruendas ope ipsius vires prismatum constantium.

27. Usus potissimus hujus instrumenti erit pro contemplanda multo melius inversione successiva spectri, quæ fieri debet multo lentius, & apparere multo evidentius, ubi adhibeantur anguli vitrei majores, quod hic licebit. Apparebit admodum evidenter ea successio etiam comparando vitrum commune cum aqua; sed longe evidentius, ubi adhibeatur flint, vel strass.

V 2 SUP-

SUPPLEMENTUM IV.

Phænomena observata inversionis successivæ spectri.

1. PROPONAM hic binas series phænomenorum inversionis successivæ excerptas ex numeris 39, & 49 dissertationis secundæ e veteribus illis. Earum serierum mentio injecta est numero 162 hujus Opusculi: observationes ipsas promisi numero 165: eæ sunt institutæ ope vitrometri illius veteris aquei, cujus descriptio habetur in supplemento II: apparet autem id instrumentum in figura 44 Tab. VII. In utraque serie radius appulit ad primam vitrometri fenestram perpendiculariter ad sensum: prima series habita est sine heliostata, ponendo intra vitrometrum successive tria prismata ex flint, ex vitro communi Bohemico, & e crystallo montana, quod postremum exhibuit bina spectra coincidentia ex parte, in quorum utroque inversio facta est in iisdem aperturis: notati sunt colores, qui sibi succedebant in vertice, qui evidentiores erant in imagine superiore libera: adhuc tamen dignoscebantur etiam in vertice imaginis inferioris, quamvis immerso intra colorem album superioris, eo quod imagines singulæ erant multo ampliores intervallo inter ipsarum vertices. Ita tamen immissa sunt ea prismata, ut basis congrueret cum basi vitrometri, quo pacto habebantur bina prismata aquea hinc, & inde a prismate immisso, alterum inter ipsum, & fenestram anteriorem, alterum ab ipso usque ad posteriorem. Secundam seriem habui, applicata facie prismatis ad vitrum fenestræ anterioris, quo pacto habebatur unicum prisma aqueum positum post vitreum adhibito heliostata, qui contrahebat imaginem, & reddebat minus distinctam, sed non ita, ut colorum appulsus ad verticem, non satis manifesti apparerent; quanquam omnia initia ipsorum appulsuum sola quadam æstimatione caperentur ad transitum ab una eorum specie ad alteram per gradus insensibiles. Assumptum autem est pro apertura respondente cuivis phænomeno medium inter plures determinationes erutas ex pluribus obser-

servationibus repetitis, habita ingenti attentione pro singulis, quam ob rem differentiæ non evaserunt nimis magnæ.

2. Habentur in sequentibus binis tabellis in prima linea anguli prismatum exigui quidem, quia, adhibitis majoribus, nondum inversio finierat aperto vitrometro, quantum ejus constructio permittebat: adhuc tamen successio, ut patet, fuit admodum lenta, adeoque admodum evidens. Multo promptior est in vitrometro vitreo, adeoque majore attentione est opus ad eam satis evidenter percipiendam. In meo novo vitrometro aqueo, quod habetur in supplemento III, adhibitis angulis majoribus erit multo adhuc lentior, & evidentior. In sequentibus lineis habentur aperturæ vitrometri pro phænomenis adnexis. En ipsas series, ubi notandum illud, pro prima summam binorum angulorum aquæ, & pro secunda angulum ejus unicum æquari summæ anguli prismatis, & aperturæ vitrometri.

Series prima.

	Flint	Bohem.	Crystal.
Anguli prismatum	15°. 32'.	15°. 40'.	13°. 6'
	Apertura vitrometri		
Rubeus desiit in vertice	19. 50	8. 27	3. 55
Cœpit ibidem viridis	21. 0	8. 40	4. 27
Desiit viridis	23. 42	9. 11.	
Cœpit apparere violaceus	25. 52	11. 15	6. 2

3. Adventus imaginis ad locum naturalem accidit pro primo prismate circa aperturam 12°, pro secundo circa 10°. Is notatus est accuratus pro imagine superiore postremi ad 8°. 51', pro inferiore ad 9°. 25'. Patet inde, inversionem totam accidisse pro primo prismate multo post appulsum ad locum naturalem, pro secundo initium ante eum appulsum, & finem post ipsum, pro tertio totam inversionem ante: inde autem deducitur, ut ostendi in illa eadem dissertatione secunda, distractionem inductam a flint esse multo majorem, quam ab aqua etiam pari refractione, inductam a vitro illo communi parum ab ea diversam, inductam vero a cry-

a crystallo montana minorem; unde fit, ut error diversæ refrangibilitatis sit minor in lente ex ea crystallo non solum, quam in lente ex flint, sed etiam quam in vitro communi: inde autem fit, ut ea substantia sit omnium aptissima pro objectivis simplicibus, & specillis, dummodo evitetur duplex refractio, quæ non habetur nisi unica, quando ipsa lens efformatur e lamina exsecta planis perpendicularibus ad longitudinem formæ naturalis prismaticæ ejus crystalli. Sed hoc postremum theorema huc non pertinet.

SERIES SECUNDA.

Anguli prismatum iidem ut supra

Apertura vitrometri	pro Flint:	pro Bohemico
Rubeus ad locum naturalem ..	11.22	
Violaceus ad locum naturalem ..	11.49	
Rubeus desiit in vertice	17.41 ...	7°.15'
Cœpit viridis	19.36	
Desiit viridis	21.46 ...	9.56. ad loc. nat.
Cœpit violaceus	26. 3 ...	13.45.

4. Non inveni in pagellis finem viridis primæ seriei pro crystallo, quæ idcirco deest etiam in illa dissertatione impressa: censeo, minorem fuisse consensum observationum. In secunda adhuc patet, totam inversionem accidisse in vitro flint multo post appulsum ad locum naturalem, in Bohemico cœpisse ante, & desiisse post: nam ibi ob exiguam distantiam colorum in substantia nimirum habente distractionem parum diversam a distractione aquæ pari refractione, fere in eadem apertura colores omnes ad locum naturalem appulerunt.

5. Differentia inter aperturas respondentes iisdem phænomenis in binis seriebus cum iisdem prismatis provenit ex eo, quod in secunda angulus aquæ fuit unicus, & in prima fuerunt bini, licet ambo simul æquales illi uni. Hæc licet pauca abunde sunt ad cognoscendam intimius, & probandam inversionem successivam.

SUPPLEMENTUM V.

Methodus adhibendi prismata eadem sine instrumento exposito in hoc Opusculo.

1. Antequam in mentem mihi veniret forma instrumenti, quod in hoc Opusculo exposui, adhibebam aliam methodum capiendi eosdem fructus ab usu prismatis variabilis vitrei, quod censui præferendum aqueo ob rationes expositas in ipso Opusculo, & determinandi angulos prismatum fixorum. Exponam hîc eam methodum pro iis, qui careant eo instrumento, & nolint subire impensam necessariam ad ipsum coemendum. Ea methodus est magis operosa, & aliquanto minus accurata: adhuc tamen, majore diligentiâ adhibitâ, usui esse potest ad percipiendos eosdem fructus. Exigua prismata fixa necessaria sunt etiam, ubi adhibentur vitrometra aquea; sed ea, & vero ipsa etiam bina frusta prismatis variabilis vitrei, facile parantur a communibus etiam specillorum artificibus, & impensam exigunt satis modicam. Sic ad habendos eosdem fructus erit quidem utilissimum instrumentum ipsum, sed non omnino necessarium.

2. Usus ejus instrumenti reducitur ad determinandum admodum facile, & satis accurate angulum cujusvis prismatis fixi, & angulum prismatis variabilis pro quavis positione frusti plano-convexi respectu plano-concavi: habebitur hîc mothodus obtinendi sine ipso caput utrumque.

§. I.

Determinatio anguli prismatis fixi exigui.

3. Difficultas determinandi satis accurate angulum exigui prismatis oritur e brevitate laterum: ea tollitur a longitudine crurum instrumenti, in quorum fine habentur fasciæ circulares pertinentes ad arcus habentes radium satis longum ad obtinenda minuta ope nonii. Hic usus suppleri potest applicatione regulæ mo-

mobilis ad latera ipsa prismatis propositi. Applicetur regula ad chartam ampliorem versus imum ipsius marginem, & bene ipsi apprimatur manu alterâ: ducatur ope styli habentis cuspidem acutam, vel acus longioris, manu alterâ linea recta tenuis longior AB (fig. 1 Tab. IX), tum applicetur ipsi regulæ prisma DCE latere suo CE: apprimatur id ipsum ad chartam manu lævâ, & subtrahatur manu dexterâ regula: tum ipsa, vel potius altera præparata ex parte lateris CD in aliqua distantia a positione præcedentis, adducatur ad ipsum latus in NP ita, ut transcurrat nonnihil ultra rectam AB, & apprimatur ad chartam eâdem manu: substrahatur prisma, & ducatur eâdem cuspide tenui recta linea PN, quæ priorem secabit alicubi in C, & erit satis longa versus N: assumatur CF in ipsa versus idem punctum N æqualis cuipiam rectæ divisæ ope transversalium in aliqua scala in partes 1000: adductâ cuspide tenui circini ad punctum F, capiatur distantia perpendicularis ejus puncti a recta AB (*), quæ translata in scalam eandem exhibebit sinum anguli NCB ad radium = 1000; adeoque habebitur is, qui est idem, ac angulus quæsitus DCE.

4. Error unius millesimæ partis radii in sinu anguli minoris gradibus 20 trahit secum errorem minorem 4 minutis in eo angulo. Cum igitur sperari possit determinatio ejus distantiæ saltem usque ad dimidium unius e partibus scalæ, abeunte nimirum altera cuspide circini accurate in aliquam intersectionem cujuspiam e transversalibus cum aliqua parallela, vel inter binas ejusmodi intersectiones; sperari potest in singulis ejusmodi observationibus determinatio, quæ non aberret a justa per duo minuta: si autem assumatur segmentum CF æquale duplo ejus rectæ ita divisæ; evitari poterit in singulis determinationibus error etiam unius minuti. Multo autem tutius evitabitur is error; si repetatur operatio pluribus vicibus, quod fiet admodum facile.

5. Si

(*) Ea distantia habetur facile adducendo secundam cuspidem ad eam rectam ita, ut circumducto eo crure perradat ipsam, quin transcurrat ultra.

5. Si enim regula sit satis longa ; ita poterit applicari iterum ad eandem rectam AB, ut nullam habeat distantiam sensibilem ab ejus marginibus A , B : tum applicato iterum eodem latere prismatis ejusdem ad ipsam regulam , & applicatâ eâdem , vel aliâ regulâ ad secundum latus ipsius , obtinebitur altera recta P'C'N' : repetitâ pluribus vicibus eâdem operatione , obtinebuntur plures rectæ PCN , P'C'N', &c., quæ omnes debent esse parallelæ inter se ; si diligentia satis attenta fuerit adhibita in singulis applicationibus regulæ primæ ad rectam AB : in apprimenda ea ad chartam , ne dimoveri possit , dum prisma ipsi applicatur : in apprimendo ad chartam prismate , ne commoveri possit , dum remotâ primâ regulâ ipsi applicatur secunda : in apprimenda ad chartam secunda regula , ne commoveri possit , dum prisma removetur , & ducitur nova recta secundum ipsam.

6. Patebit ipsis oculis , an aliqua ex iis lineis aberret sensibiliter ab aliarum parallelismo ; potissimum si nova positio prismatis recedat parum a præcedente : nam eo casu exiguum discrimen distantiarum , quas habebunt ad se invicem binæ PN prope P , & N , cadet statim sub sensum . Siqua sensibiliter aberret ; rejicietur : assumptis distantiis punctorum F a recta AB , numeri particularum inventi in scala , prodent dissensum , si ullus existat , & docebunt , usque ad quem limitem determinationibus singulis fidendum sit . Habito numero determinationum satis magno , (licet autem ipsum augere , quantum libet), & assumpto medio, si occurrant exigua discrimina , poterit utique haberi determinatio , quæ nullum relinquat periculum erroris ne unius quidem minuti .

7. Porro ad ejusmodi operationem satis est habere longiorem regulam etiam ligneam satis rectam , quæ an sit ejusmodi , facile agnoscitur per inversionem , ac habere scalam partium 1000 per rectas parallelas , & transversales , cujusmodi scalæ metallicæ sæpe inveniuntur admodum exactæ in venalibus instrumentis ; sed eam industrius horum studiorum amator facile sibi ipse efformabit in charta crassiore , vel ab industrio amico obtinebit . Facile admodum est regulas , & prisma bene apprimere , ne commoveri pos-

sint, dum sibi invicem admoventur, vel dum tenui cuspide ducitur recta linea. Hoc pacto supplebitur defectus instrumenti propositi pro hoc ejus usu.

§. II.

Determinatio angulorum prismatis variabilis.

8. SINT in fig. 2 ABC, MONL bina frusta prismatis variabilis, quorum posterius poterit superficie sua inferiori agglutinari frusto chartæ crassioris procurrenti ultra ejus limitem cavum, cui possit imponi primum frustum vitreum ita, ut adductâ ejus superficie convexâ ad concavam ipsius, id possit digito manus alterius promoveri antrorsum, retrorsum, dum manus altera tenet immotum frustum chartaceum cum vitreo ipsi affixo.

9. Imponatur frustum chartaceum tabellæ FH fig. 14 (Tab. III), adducaturque ante foramen C figuræ 11 (Tab. II) ita, ut radius per id transmissus incidat ad perpendiculum in superficiem planam frusti vitrei ipsi affixi, teste radio reflexo redeunte ad ipsum foramen: adducatur frustum vitreum plano-convexum ad contactum cum plano-concavo affixo ipsi chartæ appressæ ad eam tabellam digitis manus alterius, & promoveatur digito alterius, donec imago solis redeat ad locum naturalem, quem transmissa per foramen heliostatæ occupabat ante interpositionem prismatum. In eo situ applicatâ regulâ superficiebus superioribus binorum frustorum ita conjunctorum, ducatur recta linea tenuis E*ed*D, quæ secet transversim in punctis *e*, *d* tum conjunctis limitem dirimentem ipsas superficies, quod fiet facilius, si utrique agglutinata ante fuerit charta nitida, ac bene levigata, quæ perveniat accurate in singulis usque ad eum limitem, nec transcurrat: ut nimirum, congruentibus superficiebus internis convexâ, & concavâ binorum frustorum, congruant etiam earum chartarum margines.

10. Quotiescunque mutata fuerit positio frusti plano-convexi liberi respectu plano-concavi affixi inferne illi chartæ crassiori; reducto priore ad positionem, in qua puncta *d*, *e* iterum congruant,

gruant, habebitur parallelismus. Tum vero ubi dimotum fuerit illud ab ea positione, ut habeatur figura 3, vel 4; invenietur angulus Q prismatis variabilis, assumendo circino habente cuspides tenues distantiam punctorum *d*, *e*, quæ translata in scalam partium, quam maxime fieri potest, exiguarum exhibebit earum numerum. Is divisus per duplum numerum earundem particularum contentum in radio ejus circuli, in quo sibi invicem congruunt superficies frustorum, exhibebit sinum dimidii arcus *de*, nimirum dimidii anguli quæsiti Q, ut patet: nam chorda divisa per duplum radium æquatur dimidiæ chordæ divisæ per radium, qui est valor sinus dimidii anguli subtensi ab ipsa chorda. Patet autem, inclinationem superficierum AC, OM, sive angulum Q, habere pro mensura arcum, per quem punctum *d*, congruens cum *e* in statu parallelismi, discessit ab ipso usque ad novam positionem. Patet etiam, quo pacto inveniri debeat radius ejus circuli ex iis, quæ habentur a num. 18 hujus Opusculi I.

11. Si inventâ magnitudine ejus radii, fiat scala, quæ ope transversalium exhibeat partes ipsius millesimas; numerus inventus pro chorda multiplicatus per 5 exhibebit sinum dimidii anguli quæsiti ad radium 10000: nam ejus numeri dimidium exhibet sinum ipsum ad radium 1000.

12. Cæterum observationes omnes ope frusti minoris affixi illi frusto chartæ crassioris, cui superponatur liberum frustum majus ita, ut possit per ipsum excurrere cum contactu continuo, instituentur eodem prorsus pacto, quo ope frustorum ipsorum affixorum binis cruribus instrumenti propositi. Requiretur utique tubulus cum speculo, quod radium transmittat horizontaliter, ut in fig. 11 (Tab. II), & heliostata, ac tabella figuræ 14 (Tab. III) cum cochleis ad observationem instituendam facilius. Verum potest illud primum parari satis idoneum etiam adhibito segmento tubi chartacei exsecto ex eo genere tuborum, quod adhiberi solet pro telescopiis dioptricis, ex quo procurrant exsecta simul bina brachia EF, HI (fig. 12 Tab. II): axiculus ligneus traductus per eorum foramina in FI converti poterit cum speculo metallico D sibi adnexo ope fili ipsi advoluti, & advoluti axi ligneo KH,

sine cochleis. Heliostatæ vices supplere potest baculus longior infixus inferne massæ ligneæ crassiori, & sustinens superne binas tabellas conjunctas ad angulos rectos, quarum altera verticalis habeat foraminulum respondens illi, per quod radius admittitur in conclave, & altera horizontalis sustineat chartam illam crassiorem cum suo prismate variabili, elevandam magis, vel minus usque ad altitudinem foraminulorum ipsorum per libros diversæ crassitudinis suppositos eidem chartæ. Habebuntur eo pacto cum impensa modicissima quæcumque requiruntur ad observationes instituendas, utique minus facile, sed tamen ita, ut habitâ semel qualitate refractivâ M vitri prismatis variabilis, obtineantur valores m, m' vitrorum adhibendorum, per reditum imaginis solaris ad locum naturalem, & valores $\frac{dm}{dM}$, $\frac{dm'}{dM}$ per inversionem spectri, qui exhibeant valorem $\frac{dm}{dm'}$ adhibendum in calculis Opusculi sequentis.

13. In supplemento sequenti exhibebitur ratio determinandi adhuc multo accuratius valores hujusmodi fractionum, quæ pertineant non solum ad colores extremos, sed etiam ad numerum quemcumque binariorum graduum quorumlibet colorum quorumcumque. Adhibebimus etiam ibi instrumentum expositum in Opusculo I: verum ex iis, quæ hîc sunt dicta, satis patebit, eum etiam usum suppleri posse per methodos hîc propositas; licet ea omnia multo facilius, & accuratius determinentur ope instrumenti ipsius.

SUP-

SUPPLEMENTUM VI.

Methodus accuratior determinandi qualitates distractivas, quæ referantur ad quæcumque binaria datorum colorum quorumcumque.

1. Promiseram ego quidem num. 244 Opusculi I pro hoc supplemento plurimas observationes institutas hac mea methodo in Italia ab amico : sed cum deinde in mentem mihi venerit methodus multo accuratior determinandi ope hujus ipsius mei instrumenti qualitates distractivas diversarum substantiarum, quæ referantur ad quæcumque binaria colorum datorum quorumcumque, censui reservandam in aliud tempus collectionem uberiorem observationum tam institutarum methodo exposita in hoc ipso Opusculo, quam instituendarum hac nova methodo, quam hic subjiciam.

2. In paragrapho 10 hujus Opusculi fuse exposui methodum determinandi ope duplicis heliostatæ, & sine usu mei novi instrumenti valores *m*, a quibus exhibetur qualitas refractiva cujusvis substantiæ non solum pro radiis extremis, sed etiam pro quocumque numero colorum intermediorum, qui redeant prorsus iidem, ubi aliæ substantiæ post alias adhibentur, atque id ita, ut debeant obvenire non solum satis accurati valores totales *m*, observationum errorculis inducentibus variationes exiguas respectu totius, sed etiam multo minus erroneæ differentiæ *dm* pertinentes ad binos colores quosvis. In paragrapho autem 12 ostendi, quo pacto iidem valores obtineri possint ope instrumenti ipsius, methodo minus operosa, in qua nullum est opus assumendi pro quovis prismate fixo combinato cum variabili latera trianguli rectanguli, quæ debent exhibere tangentem refractionis *r*.

3. Verum utrobique ratio mutua ejusmodi valorum *dm* eruitur ex determinatione valoris absoluti singulorum ex ipsis, qui cum sint exigui singuli, multo minus accuratus debet evadere valor quoti pro-

provenientis ex alterius divisione per alterum ab errorculis singulorum, quam si idem eruatur immediate ex valoribus majoribus, non ex majorum exiguis differentiis. Hanc immediatam determinationem ejusmodi fractionum licebit eruere methodo sequenti. Præparatis omnibus ut num. 84 ejusdem Opusculi in fig. 20 (Tab. IV), pro solo prismate fixo *mkl* apponatur ante foramen *gg'* secundi heliostatæ instrumentum cum prismate variabili, & fixo conjunctis, ut in fig. 22: ipsum autem prisma variabile aperiatur circiter ad eum angulum, in quo fit inversio spectri in observatione simplici, quæ prius facta fuerit sine ullo heliostata, aut cum uno tantum, ab eodem variabili conjuncto cum illo eodem fixo: habebitur in pariete alicubi in TT' radiolus deflexus per refractionem. Adducatur ad eum radiolum charta habens lineam rectam verticalem ita, ut ipse radiolus tangatur ab ea recta in eo suo extremo T, ad quod advenit radius *p*T, qui traductus per *g* inciderat in primam superficiem ad perpendiculum: potest autem ea charta ibi retineri a socio adjutore, vel plicata prope suum marginem superiorem appendi filo horizontaliter affixo per binos clavos ipsi parieti ita, ut possit promoveri nonnihil antrorsum, retrorsum, manente ad sensum eo parallelismo.

4. Excepto ea ratione altero e radiolis comparandis determinato per unam e positionibus regulæ *be* determinantis positionem prismatis MKL, & spectri integri *tt'*, adducatur ad ipsum foramen *gg'* alter radiolus per conversionem ejusdem regulæ: & si is abeat eodem suo margine in illud idem punctum T; is angulus prismatis fixi erit ille, qui destruit distractionem ejus binarii colorum, qui nimirum erit valor *b'* formulæ numeri 234 adhibiti ibidem in calculo Tabulæ adnexæ ad eruendum valorem fractionis $\frac{dm}{dM}$.

5. Si secundus radiolus non redeat accurate ad lineam chartæ; mutetur nonnihil apertura instrumenti, quæ inducet exiguam mutationem loci radioli TT', ad cujus novum punctum T adducatur illa linea: tum conversione ejusdem regulæ *be* restituatur ad *gg'* idem primus radiolus: & si nondum accurate ejus

mar-

margo T advenit ad eandem rectam verticalem; invenietur, uti fit in methodo falsæ positionis, apertura, quæ restituat marginem alterius ad contactum lineæ, quæ tangebat primum. Angulus prismatis variabilis, in quo habetur accuratus ejusmodi regressus, erit ejus angulus quæsitus b', ut patet.

6. Formula erat duplex eo numero, & utraque indigebat valoribus M, m, qui habebuntur methodo exposita in ipsis paragraphis 10, & 12 Opusculi ejusdem. Possent quidem ii valores haberi pro illis ipsis binis coloribus methodo exposita in paragrapho 10, vel inveniri bini valores M prismatis variabilis ea methodo operosiore, quæ requirit distantiam pX a pariete puncti prismatis, ex quo radius prodit, & distantias HX, TX radiorum directi, & refracti ab eo perpendiculo, tum eruere valores m, m' ex reditu radioli transmissi per prismata variabile, & fixum conjuncta methodo paragraphi 12, assumendo deinde pro singulis M, m adhibendis in ea formula medium inter valores inventos pro singulis radiolis: sed ipse valor M medius semel inventus inter extremos rubeorum, & violaceorum, parum utique differentium a se invicem, adhiberi hic poterit sine periculo erroris, qui non sit exiguus respectu fractionis quæsitæ, tam ubi quæritur valor m per reditum ad locum naturalem, quam ubi adhibetur M, & m in calculo applicato ad eam formulam.

7. Inventis hoc pacto valoribus $\frac{dm}{dM}$, $\frac{dm'}{dM}$, $\frac{dm''}{dM}$, &c. pro pluribus substantiis habentibus suos valores m, m', m'' &c., habebuntur valores $\frac{dm}{dm'}$, $\frac{dm}{dm''}$, &c., vel $\frac{dm'}{dm}$, $\frac{dm''}{dm}$, &c., dividendo primam ex iis fractionibus per sequentes, vel sequentes per ipsam, ut in fine ipsius Opusculi I. Tum si comparetur radiolus aliquis e primis rubeis, cum pluribus aliis totius spectri in duabus substantiis, & assumantur pro figura 21 abscissæ AB, AC, AD, &c. pertinentes ad alteram, & ordinatæ BB', CC', DD' &c. pertinentes ad alteram; habebitur multo melius natura curvæ AB'G'.

8. Ea curva in illa veteri dissertatione determinabatur per methodum analogam methodo interpolationum. Determinabantur anguli

guli prismatis variabilis, qui in inversione directa spectri incipiebant extare soli in ipsius prismatis margine, loco geometrico habente pro abscissis segmenta respondentia differentiis valorum *m* pertinentium ad primum colorem rubeum a valoribus pertinentibus ad sequentes quoscumque suo ordine in una substantia, & pro ordinatis rectas respondentes iisdem differentiis in alia, debebat obtineri linea recta; si eæ differentiæ omnes essent in eadem ratione ad se invicem: si ratio esset diversa; obtinebatur linea curva, quam debebant tangere in verticibus datarum ordinatarum rectæ lineæ inclinatæ ad eas in angulis determinandis per aperturas, in quibus colores ipsis respondentes inciperent extare soli.

9. Cum satis accurate determinari non possint initia, & fines colorum datarum specierum desinentium, & incipientium per gradus insensibiles, ut eadem initia assumi possint, ubi una substantia adhibetur post aliam; nulla habebatur spes satis accurate determinandi eam curvam. Ea melius determinatur methodo interpolationum; si habeatur ex observationibus paragraphi 10 certus numerus valorum *dm* sibi respondentium in iis binis substantiis, quorum singulis binariis respondeant suæ abscissæ in una substantia, & ordinatæ in alia. Periculum erroris non tam exigui respectu valorum adeo exiguorum, reddit minus tutam eam quoque rationem determinandi curvam eandem. Determinatio immediata fractionum hic exposita rem præstat multo tutius, & accuratius.

10. Valores $\frac{dm'}{dm}$, $\frac{dm''}{dm}$, &c., hic immediate determinati, erunt nobis summo etiam usui in supplemento II Opusculi sequentis ad conjungendos plures colores per objectiva composita e pluribus substantiis.

OPU-



OPUSCULUM II.

DEDUCTIO FORMULARUM PERTINENTIUM AD FOCOS LENTIUM, CUM EARUM APPLICATIONE AD CALCULANDAS SPHÆRICITATES, QUÆ ADHIBERI DEBENT PRO TELESCOPIIS ACROMATICIS.

PRÆFATIO.

1. IN hoc Opusculo habebuntur formulæ pro eruendis sphæricitatibus lentium tam pro objectivis, quam pro ocularibus acromaticis, cum earum reductione ad formam simpliciorem, & applicatione ad numeros, suppositis jam inventis ope Opusculi primi qualitatibus refractivis vitrorum adhibendorum, & relatione mutua qualitatum distractivarum, quas habent eædem substantiæ. Continebit autem quatuor capita. In primo habebitur deductio prima formularum fundamentalium, prout jam habebatur in prima ex illis veteribus meis dissertationibus: in secundo earum applicatio ad lentes acromaticas, ac reductio ad formam simpliciorem, & commodiorem: in tertio habebuntur solæ formulæ finales, adhibendæ pro diversis combinationibus arbitrariis commodioribus: in quarto habebitur earum explicatio cum exemplis calculorum numericorum.

2. In primo capite omittemus omnes adnotationes, quæ occurrunt in illa dissertatione, & continent plura theoremata pertinentia ad theoriam lentium, sed quæ nobis non erunt hic usui. Assumemus autem omnia, quæ habentur ibi usque ad formulas, quas Clairautius invenit methodo aliquanto sublimiore, cum formulis ipsis fundamentalibus. Is eas exhibuit pro so-

lis binis lentibus parum a se invicem distantibus involvendo tam errorem, qui oritur a diversa refrangibilitate, quam eum, quem gignit figura sphærica: adjunxit etiam correctionem, quæ respondet crassitudini lentis, & distantiæ ipsarum lentium a se invicem. Cum harum deductio sit admodum expedita; excribemus ipsas, uti sunt in ipso illo textu continuato; quanquam iis in hoc Opusculo nequaquam indigebimus.

3. Correctionem, quæ respondet crassitudini lentis, adhibuimus in eadem prima dissertatione ad eruendas formulas pro usu trium focorum lentis, quibus usi sumus in adnotatione ad num. 106 primi Opusculi pro corrigendis radiis binarum sphæricitatum inde deductis cum qualitate refractiva ejus vitri: eas formulas ibi proposuimus tantummodo sine demonstratione.

4. Correctionem alteram, quæ respondet distantiæ lentium, adhibent nonnulli ad imminuendum effectum, quem debet gignere error commissus in tornandis vitris ita, ut radii sphæricitatum non sint omnes accurate ii, quos exhibent formulæ applicatæ ad naturam eorum vitrorum, quæ adhibentur pro lentibus. Inveniunt ei malo remedium in distantia unius lentis ab alia, quam præscribunt augendam, vel minuendam, donec per ejusmodi attentationem deveniatur ad illam, quæ corrigat eum defectum. Ego in sequentibus nunquam utar ejusmodi distantia, & adhibendas censeo lentes contiguas, quæ respondeant formulis, atque id ob plures rationes. Primo quidem, quia ea distantia non potest corrigere utrumque ex erroribus, quos gignit discrimen sphæricitatum inductarum lentibus ab iis, quæ deberent haberi, nimirum eum, qui respondet errori diversæ refrangibilitatis, & alterum, qui respondet figuræ sphæricæ: dum alter corrigitur, alter potest augeri. Deinde, quia colores, qui habentur in telescopiis, proveniunt multo magis ab ocularibus, ut patebit in initio Tomi II, quam ab objectivis, ad quorum correctionem adhiberi solet ea lentium distantia, qua isti utuntur: adeoque si ii remaneant; id vitium potius tribui debet vitiosæ combinationi ocularium, quam vitiosis sphæricitatibus objectivi: demum quia multo melius est inquirere in sphæricitates ipsas, determinando sin-

singularum radios methodo exposita in illo eodem numero 106, qua methodo cognoscitur, an omnes sphæricitates inductæ sint eæ, quæ sunt deductæ a formulis applicatis ad naturam vitrorum adhibitorum, & siqua aberrat, quænam sit, ut reducatur ad debitam formam; quam applicare per attentationem, & quidem incerti exitus, remedium, quod dum destruit alterum e binis erroribus, potest non solum relinquere, sed etiam augere alterum.

5. Formulæ, quas hic deducimus, sunt formulæ fundamentales, & generales, quæ novis calculis indigent, & novis formis, ut applicari possint in casibus singulis ad determinandas sphæricitates, quæ destruant, quantum fieri possit, eos binos errores: pertinent autem ad objectivum, vel ocularem, sive pro iis componendis adhibeantur binæ lentes, sive ternæ contiguæ. Eæ transformationes habebuntur in capite secundo: methodus autem corrigendi, vel minuendi eosdem errores pro ocularibus remotis a se invicem exhibebitur in Opusculo separato, quod habebitur initio tomi II; sed ea, quæ ad usum pertinent, inde excerpta proponemus hic itidem post hoc Opusculum in supplementis.

6. Clairautius proposuit suas formulas solum pro objectivo composito e binis lentibus, quia initio Dollondus nonnisi duas adhibebat, ac ex formula exprimente errorem figuræ sphæricæ pro prima lente deduxit eam, quæ pertinet ad secundam; in applicatione vero egit de solo composito e binis: nos in hoc Opusculo præstabimus tria: 1°. ad demonstrandas formulas fundamentales, quæ solæ continebuntur in hoc capite, adhibebimus methodos simpliciores, quæ nihil supponant ex calculo infinitesimali, nec ex seriebus, quæ exprimunt valores arcuum, quæ methodi idcirco sint ad captum eorum, qui norunt sola simpliciora elementa geometriæ, & calculi finiti: 2°. eruemus capite secundo eodem modo expressionem erroris figuræ sphæricæ pro tertia, ac pro applicatione ad casus particulares utemur itidem methodis multo simplicioribus, & proponemus formulas multo magis accommodatas ad usum facilem, & expeditum. Iis, qui sunt exercitati in applicandis numeris ad formulas algebraicas, abunde esset caput tertium, in quo habebuntur solæ formulæ finales: sed ad redden-

Y 2 dum

dum earum usum multo faciliorem ipsis Tyronibus, quos Artifices possint consulere pro instituendis calculis ad eruendos radios sphæricitatum e datis vitrorum qualitatibus, addendum censuimus caput quartum, in quo singillatim explicarentur tam eæ ipsæ formulæ, quam exempla calculorum numericorum applicata ad singulas.

CAPUT I.

Formulæ fundamentales pro lentibus simplicibus & compositis:

§. I.

Plures notitiæ præmittendæ.

1. FORMULÆ, quas hîc exhibemus, pertinent tam ad relationem inter radios sphæricitatum lentium, quarum substantiæ habent qualitates cognitas, & earum focos, quam ad magnitudinem errorum & diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ.

2. Pro utroque ex iis erroribus formulæ, quæ hîc proponentur, pertinent ad illum, quem longitudinalem appellant, nimirum distantiam puncti axis, ad quod convergunt radii, qui conveniunt omnium citissime, ab eo, ad quod convergunt ii, qui conveniunt cum eodem axe ad distantiam omnium maximam: radii quidem aberrantes disperguntur per circellos quosdam; sed correcto errore longitudinali corrigitur simul ea dispersio; & si is corrigeretur simul pro omnibus etiam radiis intermediis; radii digressi ex unico puncto objecti coirent simul omnes in unico puncto imaginis, & imago evaderet exactisima. Verum hæ formulæ, quod pertinet ad errorem diversæ refrangibilitatis, non referuntur nisi ad singula colorum binaria, & respectu utriusque exhibent valores non accuratos, sed veris proximos, cum in omnibus hisce calculis negligantur quantitates exiguæ ordinum inferiorum, retentis solum iis, quæ sunt ordinis primi.

3. Accedit, quod ipsæ formulæ erutæ sunt ex ea suppositione, quod punctum, a quo radii divergunt, sit in axe. Pro punctis

ctis objecti sitis in positione parum inclinata eæ nonnihil aberrant a veris. Correctio iis adhibenda in eo casu posset quidem determinari; sed ea determinatio esset multo complicatior. Adhuc tamen sola correctio erroris longitudinalis orti a diversa refrangibilitate, & ab errore sphæricitatis, qui respondet hisce formulis, & quem adhibebimus solum, obtinuit, teste successu, telescopia egregia, quæ longitudinis exiguæ, & expeditissima pro usu, sunt multo superiora veteribus longitudinis immanis, & ægre admodum tractabilis.

4. Notandum etiam, hasce formulas non posse habere locum pro lentibus, quæ habeant radios sphæricitatum perquam exiguos, quia supponunt, radium, dum refringitur, mutare directionem in unico puncto ipsius superficiei refringentis, quod & in catoptrica supponitur pro radio reflexo, tanquam si in eo unico puncto quodammodo veluti frangeretur ibi, illæsus per totum tractum tam præcedentem, quam sequentem. Verum, ut Newtonus ipse egregie notavit, mutatio directionis fit per arcum quendam continuum, cujus curvatura incipit, & desinit esse sensibilis in ea distantia a superficie refringente, vel reflectente, ad quam protenditur actio sensibilis, quam exercent corpora refringentia, vel reflectentia in radios luminis, quam ipsam distantiam is etiam determinavit sagacitate eximia. Ea quidem distantia est admodum exigua, sed non prorsus insensibilis.

5. Verum ubi agitur de lentibus, quæ adhiberi solent pro telescopiis, ea distantia est ita exigua, ut sine errore considerabili totus ille arcus accipi possit pro puncto unico: secus accidere potest in lentibus objectivis, quæ adhibentur pro microscopiis, quæ quandoque ita exiguos habent radios sphæricitatum, ut hæ formulæ ipsis applicatæ debeant ob eam causam inducere errores admodum ingentes.

6. Idem accidit crassitudinibus lentium, quæ hic contemnuntur. Id quidem tuto fit in lentibus, quæ habent ipsas exiguas respectu distantiæ focalis: at ubi hæc ratio est multo major, admodum fallax est formula ipsa, quæ exhibet correctionem respondentem crassitudini, quam ipse Clairautius invenit, & nos

hic

hìc retinebimus, licet eam non adhibeamus in hoc Opusculo, nec adhibuerimus in præcedente nisi in unica ipsius nota (num. 106), ut supra innuimus. Sed procedendum jam ad determinationem formularum ipsarum incipiendo a §. II ejus dissertationis primæ num. 21, & eam describendo, uti habetur ibi, sine ulla mutatione usque ad ejus numerum 56 exclusive, quamobrem hìc ille numerorum ordo immutabitur.

§. II.

Determinatio formularum excerpta ex paragrapho secundo dissertationis veteris primæ.

7. *Lemma.* In triangulo rectangulo, in quo unum latus est perquam exiguum, differentia hypothenusæ, & alterius lateris est quamproxime quadratum illius divisum per duplum utriuslibet horum.

8. Si enim (fig. 1. Tab. X) sit AMO semicirculus, S centrum, MX perpendicularis ad AO; erit AX differentia rectarum SM, SX æqualis quadrato MX diviso per XO, sive per SX + SM, nimirum si MX fuerit exigua, adeoque SM, SX quam proxime æquales, per duplum utriuslibet SM, SX.

9. *Prop.* 1. Si radii mM tendentes ad punctum G axis ASO arcus circularis AM habentis centrum in S refringantur in M ita, ut ductâ rectâ SMs sinus incidentiæ sMm ad sinum anguli refracti SMH sit, ut m ad 1; quæritur AH distantia foci H ab A.

10. Erit MH ad HS, ut *sin*.MSH ad *sin*.SMH, vel assumpto pro termino medio rationis componendæ *sin*.SMG, conjunctim ut *sin*.MSH, sive *sin*.MSG ad *sin*.SMG, & *sin*.SMG = *sin*.sMm ad *sin*.SMH. Prima ex hisce rationibus est MG ad GS, secunda m ad 1. Habetur igitur MH : HS :: $m \times$ MG : GS.

11. Ponatur jam AS = SM = a, AH = x, AG = p, MX = e. Erunt HS = $x - a$, GS = $p - a$: tum per lemma AX = $\frac{e^2}{2a}$, adeo-

ideoque $HX = x - \frac{e^2}{2a}$, $GX = p - \frac{e^2}{2a}$, quibus addita eorum differentia ab HM, GM, nimirum (per lemma) $\frac{e^2}{2HX}$, $\frac{e^2}{2GX}$, sive quam proxime $\frac{e^2}{2x}$, $\frac{e^2}{2p}$, erit $HM = x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x}$, $GM = p - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2p}$, vel facto $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$, $GM = p - \frac{1}{2}ke^2$.

12. Substitutis hisce valoribus in proportione $MH : HS :: m \times MG : GS$, habebitur $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2x} : x - a :: mp - \frac{1}{2}mke^2 : p - a$, quod ob $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p} = \frac{p-a}{ap}$ evadit apk. Ejusmodi æquatio rite tractata dabit valorem quæsitum x.

13. *Schol.* 1. Erueretur inde æquatio secundi gradus: sed ea facile evitabitur; si quæratur primo valor x vero proximus, tum is substituatur in exigua fractione $\frac{e^2}{2x}$. Id autem obtinebitur inveniendo valorem debitum radiis infinite proximis axi.

14. *Coroll.* 1. Si sit q valor ipsius x pro radiis infinite proximis axi, evanescente arcu $AM = e$, adeoque evanescentibus omnibus terminis multiplicatis per e^2, habebitur $q : q - a :: mp : apk :: m : ak$. Quare $mq - ma = akq$, & $ma = mq - akq$, sive $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$, vel $q = \frac{am}{m - ak}$.

15. *Coroll.* 2. Si hic valor $\frac{1}{q}$ ponatur, in tertia parte primi termini proportionis inventæ num. 12, pro $\frac{1}{x}$; primus terminus evadet $x - \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{2a} - \frac{ke^2}{2m} = x - \frac{ke^2}{2m}$. Quare fiet $x - \frac{ke^2}{2m} : x - a :: mp - \frac{1}{2}mke^2 : apk$: unde eruitur $mpx - \frac{1}{2}mke^2x - mpa + \frac{1}{2}mkae^2 = apkx - \frac{apk^2e^2}{2m}$: inde vero provenit $x = \frac{mpa - \frac{1}{2}make^2 - \frac{apk^2e^2}{2m}}{mp - apk - \frac{1}{2}mke^2}$.

16.

16. *Schol.* 2. Ea fractio reducitur ad multo simpliciorem ; si notetur , in numeratore posteriores duos terminos esse perquam exiguos respectu primi , & in denominatore postremum respectu priorum duorum . Nam habetur hujusmodi lemma prorsus elementare , & usitatum : si sint $A+y$, & $B+z$, ac y , & z sint admodum parvæ respectu A , & B ; neglectis terminis , in quibus eæ assurgunt ad plures dimensiones ; erit , $\frac{A+y}{B+z}=\frac{A}{B}+\frac{-Az+By}{B^2}$, quod quidem lemma facile patebit facta actuali divisione tum A , tum y per $B+z$.

17. *Coroll.* 3. Fractio corollarii secundi huc redit : $x=\frac{mpa}{mp-apk}+\frac{(mpa)\frac{1}{2}mke^2-(mp-apk)\times(\frac{1}{2}mkae^2+\frac{apk^3e^2}{2m})}{p^2(m-ak)^2}$

Primus terminus evadit $\frac{ma}{m-ak}=q$. Secundus terminus , factâ actuali multiplicatione secundæ partis in denominatore , acquirit hanc formam $\frac{m^2a^2\left(\frac{k^2}{mp}-\frac{k^2}{m^2a}+\frac{k^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2}{(m-ak)^2}=q^2\left(\frac{k^2}{mp}-\frac{k^2}{m^2a}+\frac{k^3}{m^3}\right)\frac{1}{2}e^2$. Ibi vero post secundum coefficientis terminum addito , & dempto $\frac{k^2}{m^2p}$, ac pro $-\frac{k^2}{m^2a}+\frac{k^2}{m^2p}=\frac{k^2}{m^2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{p}\right)$ scripto $-\frac{k^3}{m^2}$, habebitur $\frac{k^2}{mp}-\frac{k^3}{m^2}-\frac{k^2}{m^2p}+\frac{k^3}{m^3}=-\frac{m-1}{m^3}\left(k^3-\frac{mk^2}{p}\right)$. Quare demum fiet $x=q-q^2\times\frac{m-1}{m^3}\left(k^3-\frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, & facto $\phi=\frac{m-1}{m^3}\left(k^3-\frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, habebitur $x=q-q^2\phi$.

18. *Schol.* 3. Hæc formula est eadem , ac illa , quam Clairautius invenit in fine problematis 2 dissertationis insertæ Commentariis Academ. Paris. ad ann. 1756 : is tantum pro $\frac{m-1}{m^3}$

$(k^3$

$\left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)$ scribit $\frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \times \left(\frac{1}{m} k^3 - \frac{k^2}{p}\right)$, quod eodem redit. Sed ejus calculus derivatus ex lemmate aliquanto minus elementari pendente a natura sinuum est paullo operosior, si totus evolvatur.

19. In hac formula primus terminus q exhibet distantiam foci radiorum infinite proximorum axi, & est $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma} + \frac{1}{mp} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp} = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{a} + \frac{1}{p}\right)$: secundus autem terminus $- q^2 \phi$ exhibet correctionem debitam figuræ sphæricæ pendentem ab apertura, cujus radius e. Quod si radii veniant paralleli, vel ex immani distantia; termini divisi per p evanescent, ac fiet $k = \frac{1}{a}$, adeoque $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, & $q = \frac{ma}{m-1}$, ac $q^2 \phi = \frac{m^2 a^2}{(m-1)^2} \times \frac{m-1}{m^3} \times \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{2} e^2 = \frac{e^2}{2(m-1)ma}$.

20. Eruemus jam ex formula generali valoris $\frac{1}{q}$ aliud corollarium, quod erit usui in prosequendo calculo pro binis superficiebus, sive pro lentibus.

21. *Coroll.* 4. Si mutetur AG mutatione exigua; mutabitur AH mutatione, quæ ad eam mutationem erit, ut AH^2 ad $m \times AG^2$.

22. Cum enim sit $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, & terminus $\frac{m-1}{ma}$ non mutetur, mutato $AG = p$; erit mutatio termini $\frac{1}{q}$ æqualis mutationi termini $\frac{1}{mp}$, sive $\frac{dq}{q^2} = \frac{dp}{mp^2}$, adeoque $dq : dp :: q^2 : mp^2 :: AH^2 : m \times AG^2$.

23. *Prop.* 2. Si (fig. 2) radios mM, qui tendebant ad G, & a prima superficie AM detorti sunt ad H, secunda superficies BN detorqueat ad I ita, ut ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti sit 1 ad m; quæritur BI distantia foci I a B.

24. Patet, BI determinari eodem pacto per BH, $\frac{1}{m}$, radium circuli, cujus arcus BN, & aperturam BN, quo AH determinata est per AG, m, radium circuli, cujus arcus AM, & valorem ejus aperturæ.

25. Dicatur b radius arcus BN, pro BN ponatur ipse valor e ob tantam propinquitatem punctorum M, N, ac crassitudo lentis AB dicatur α: & si esset BH $= q$; ad habendam BI oporteret primo quidem pro $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$ facere $l = \frac{1}{b} - \frac{1}{q}$, tum pro $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{k}{m}$ facere $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml$, & pro $\varphi = \frac{m-1}{m^3} \times \left(k^3 - \frac{mk^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$ facere $\pi = \left(\frac{1}{m} - 1\right)m^3\left(l^3 - \frac{l^2}{mq}\right)\frac{1}{2}e^2 = -\frac{m-1}{m}\left(m^3l^3 - \frac{m^2l^2}{q}\right)\frac{1}{2}e^2$, ac haberetur BI $= r - r^2\pi$.

26. Cum vero BH non sit q, sed $q - q^2\varphi - \alpha$, etiam valor BI evadet diversus ab invento $r - r^2\pi$. Discriminis fons erit duplex: primo quidem, quia in valore $\frac{1}{b} - \frac{1}{q}$ oportet ponere pro q totum valorem $q - q^2\varphi - \alpha$, ut & in termino $\frac{l^2}{q}$ valoris π; deinde quia imminuto valore rectæ BH suppositæ $= q$ per $q^2\varphi + \alpha$, etiam valor BI minuitur juxta num. 21.

27. Primum discrimen negligi potest ob exiguitatem valoris π, qui nimirum habet pro coefficiente e^2, & mutatur mutatione exigua respectu sui posito valore q pro valore, qui ab ipso modicissimum differt: secundum autem discrimen compensatur juxta ipsum num. 21; si a valore rectæ BI auferatur differentia ipsius BH ducta in $\frac{m \times BI^2}{BH^2}$, sive quamproxime in $\frac{mr}{q^2}$, nimirum $mr^2\varphi + \frac{mr^2\alpha}{q^2}$. Erit igitur BI $= r - \frac{r^2m\alpha}{q^2} - r^2(m\varphi + \pi)$, ubi r erit distantia foci pro radiis infinite proximis axi neglectâ α crassitudine len-

lentis, $\frac{r^2 m\alpha}{q^2}$ decurtatio nata ab ipsa crassitudine, & $r^2(m\varphi + \pi)$ error natus ab apertura e.

28. *Coroll.* 1. Haud difficulter eliminabuntur e superiore formula valores k, q, l. Erat $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ma} + \frac{1}{mp}$; $l = \frac{1}{b} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ma} - \frac{1}{mp}$, ubi ob $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ fiet $l = \frac{1}{ma} - \frac{1}{mp} - \frac{1}{f}$, adeoque $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} - ml$ fiet $= \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{p} + \frac{m}{f} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{p} + \frac{m}{f} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, qui est valor distantiæ foci radiorum infinite proximorum axi neglectâ crassitudine lentis. Ibi, si radii advenient paralleli, evanescente $\frac{1}{p}$, remanebit $\frac{m-1}{f}$: adeoque si distantia foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi, neglecta crassitudine, dicatur h; erit $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, & $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}$, quæ formula exhibet expeditissimam determinationem valoris r per h, & vice versa, dato p.

29. Fiet autem $m\varphi = \frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{m}k^3 - \frac{k^2}{p}\right)\frac{1}{2}e^2$, & $\pi = \frac{m-1}{m} \times \left(-m^3 l^3 + \frac{ml^2}{q}\right)\frac{1}{2}e^2$, ubi peractis multiplicationibus, & ordinatis valoribus ita, ut in unam summam computentur termini continentes idem productum ex a, p, f, obtinebuntur pro parenthesi valoris $m\varphi$ termini quatuor, & pro parenthesi valoris π termini decem, quorum primis quatuor elisis a totidem pertinentibus ad $m\varphi$, relinquetur valor $m\varphi + \pi$: si is fiat $= \rho$, erit $\rho = \frac{m-1}{m} \times \left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}\right)\frac{1}{2}e^2$.

 30. Di-

30. Distantia vero foci a superficie sibi proximâ integra, & correcta erit $r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2 \rho$.

31. *Scholium*. Plura theoremata pro lentibus inde facile deduci possunt nota in Dioptrica; sed hìc indicabimus pauca tantummodo. Inversâ lente manet valor r, sive distantia foci radiorum infinite proximorum axi; sed mutatur error tam ortus ex apertura, quam ex crassitudine lentis; si binæ superficies non sint æqualis sphæricitatis: sed ii itidem manent; si superficies sint sphæricitatis ejusdem.

32. Quævis lens sphæricitatum utcumque inæqualium, contempto errore tam crassitudinis, quam aperturæ, habet lentem isosceliam sibi prorsus æquivalentem, cujus nimirum radius sit medius harmonice proportionalis inter illius radios, sive cujus radio facto $= a'$, & illius radiis in sua directione opposita factis a, b, sit $\frac{2}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

33. Ea profluunt ex valoribus q, ρ, & formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$: inde & sequens corollarium dimanat, quod sternit viam ad lentes duas conjunctas simul.

34. *Coroll.* 2. Si mutetur mutatione exiguâ distantia AG; mutabitur BI mutatione, quæ erit ad ipsam in ratione duplicata directa ipsius BI ad AG.

35. Nam in formula $\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, stante $\frac{m-1}{f}$, erit $-\frac{dr}{r^2} = -\frac{dp}{p^2}$, adeoque $dr : dp :: r^2 : p^2$. Est autem BI quamproxime æqualis primo termino r sui valoris, & ejus mutatio hujus mutationi.

36. Si post primam lentem terminatam binis superficiebus AM, BN sit alia (fig. 3) ex alia massa, sed in eodem medio, ut in aere, terminata superficiebus CO, DP; oportet invenire distantiam DL foci L a superficie sibi proxima.

37. Dicatur β intervallum BC binarum lentium, γ crassitudo CD

CD secundæ, c radius primæ superficiei CO secundæ lentis, d radius secundæ DP, M : 1 ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti in ingressu ex aere in materiam secundæ lentis, H distantia foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi secundæ lentis. Debet inveniri DL per radios c, d, per M, H, per aperturam e, & per distantiam CI puncti, ad quod convergunt radii, a prima superficie CO, prorsus ut est inventa BI per a, b, m, h, e, & distantiam AG $= p$.

38. Valor BI est $r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - r^2\rho$, adeoque CI $= r - \frac{r^2 m\alpha}{q^2} - \beta - r^2\rho$. Sed si is valor esset r, ac formarentur Q, R, σ per c, d, M, g, r, prorsus ut formatæ sunt q, r, ρ per a, b, m, f, p; esset DL $= R - \frac{R^2 M\gamma}{Q^2} - R^2\sigma$. Sed quoniam CI est minor, quam r per $\frac{r^2 m\alpha}{q^2} + \beta + r^2\rho$; oportebit per numer. 34 adhuc demere hunc valorem ductum in $\frac{DL^2}{BI^2}$, sive proxime in $\frac{R^2}{r^2}$. Eo pacto habetur distantia quæsita DL $= R - R^2\left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M\gamma}{Q^2}\right) - R^2(\rho + \sigma)$.

39. Exprimet autem primus terminus distantiam foci radiorum infinite proximorum axi contempta crassitudine, & distantia lentium, secundus terminus correctionem his debitam, tertius correctionem debitam figuræ sphæricæ.

40. *Schol.* 1. Sequentibus binis corollariis proponam valores omnes inventos, primo quidem pro radiis utcumque convergentibus, vel divergentibus, tum pro parallelis. Valores radiorum sphæricitatis censentur positivi, ubi centrum jacet ultra superficiem respectu radiorum venientium ad lentes, qui evadunt infiniti pro planis, & negativi pro centro jacente citra. Valor p censendus est positivus, infinitus, vel negativus, prout radii adveniunt convergentes, paralleli, vel divergentes.

41. *Coroll.* 1. Formulæ superius inventæ in prop. 1, & 2, ac inveniendæ ope hujus propositionis sunt, quæ sequuntur.

Ra-

Radii quatuor sphæricitatum	a, b, c, d.
Aperturæ semidiameter	e.
Crassitudo primæ lentis, intervallum lentium, crassitudo secundæ	α, β, γ.
Rationes refractionum pro binis massis . . .	$m:1$, $M:1$.
Distantia puncti convergentiæ radiorum incidentium	p.
Distantiæ foci radiorum infinite proximorum axi neglectis superficierum intervallis post superficies 1, 2, 3, 4	q, r, Q, R.
Distantiæ foci radiorum parallelorum infinite proximorum axi, neglectis superficierum intervallis pro lentibus prima, & secunda seorsim	h, H.

Valores subsidiarii.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \qquad \frac{1}{g} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$$

$$\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}.$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{p}.$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{M-1}{Mc} + \frac{1}{Mr} = \frac{M-1}{Mc} + \frac{m-1}{Mf} + \frac{1}{Mp}.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M-1}{g} + \frac{1}{r} = \frac{M-1}{g} + \frac{m-1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{H} + \frac{1}{h} + \frac{1}{p}.$$

$$\rho = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4m+4}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

$$\sigma = \frac{M-1}{M}\left(\frac{M^3}{g^3} - \frac{2M^2+M}{cg^2} + \frac{M+2}{c^2g} + \frac{3M^2+M}{rg^2} - \frac{4M+4}{crg} + \frac{3M+2}{r^2g}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

Distantia foci primæ lentis . . . . $r - r^2 \times \frac{m\alpha}{q^2} - r^2\rho$.

Distantia foci ambarum simul . . . . . $R - R^2\left(\frac{m\alpha}{q^2} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M\gamma}{Q^2}\right)$
$- R^2(\rho+\sigma)$.

CA-

CAPUT II.

Applicatio formularum fundamentalium ad lentes compositas acromaticas.

§. I.

Plures notiones præmittendæ.

1. PONEMUS hìc primo formulas fundamentales, tum earum evolutionem multiplicem, quæ exhibeat radios sphæricitatum, & distantias focales tam lentium componentium singularum, quam lentis compositæ, reducendo reliquas omnes ad unitatem æqualem huic postremæ. Formulæ fundamentales erunt illæ ipsæ, quas invenimus in capite præcedenti, ex quibus derivabimus ea, quæ hìc erunt usui, donec deveniamus ad novas formulas vel generales pro hac lentium compositarum specie, vel particulares pro casibus quibusdam particularibus, & magis idoneis pro usu. Negligemus, ut innuimus capite superiore, ubique crassitudinem lentium, & considerabimus lentes componentes contiguas. Incipiemus autem a lentibus compositis, quarum systema corrigat solum errorem diversæ refrangibilitatis, relicto altero figuræ sphæricæ, quod sufficit pro quibusdam usibus ocularium, & exhibet tam calculos pro applicatione multo breviores, ac minus complicatos, quam formas simpliciores : tum exponemus ea, quæ pertinent ad objectiva, in quibus nimirum corrigatur simul error uterque. Quæ pertinent ad errorem figuræ sphæricæ pro ocularibus, habebuntur in alio Opusculo initio tomi II. Hìc autem repetemus primo loco plures denominationes adhibitas in capite superiore, ut hoc caput, suppositis formulis fundamentalibus, possit subsistere per seipsum : sed in iis occurret mutatio nonnullorum e valoribus denominatis, quod exprimeat adnotationes ad numeros *6*, & *7*.

2. Porro lentem primam appellabimus eam, quæ prior excipit radios

radios advenientes, & considerabimus, ut positivos eos radios sphæricitatum, eas distantias focales, eas distantias a lentibus, quarum directio, incipiendo a lente quavis est eadem, ac directio radiorum luminis advenientium: directionem contrariam habebimus pro negativa. Inde habebuntur hujusmodi regulæ.

I Prima superficies lentis, si fuerit convexa, habebit radium sphæricitatis positivum: si concava, negativum.

II Secunda superficies lentis, si fuerit convexa, habebit radium sphæricitatis negativum: si concava, positivum.

3. Si radii ad lentem adveniant convergentes ad punctum quodpiam positum ultra ipsam, vel divergentes a puncto posito citra, quod punctum appellabimus *punctum dirigens radios incidentes*; distantia ipsius a lente erit positiva in primo casu, negativa in secundo.

4. Si radii prodeant a lente convergentes ad punctum positum ultra ipsam, vel divergentes a puncto posito citra, quod punctum appellabimus *dirigens radios refractos*; distantia ipsius a lente erit positiva in primo casu, negativa in secundo.

5. Si superficies lentis fuerit plana, vel radii luminis adveniant, aut prodeant paralleli; valor radii sphæricitatis, aut distantiæ puncti dirigentis radios incidentes, vel refractos, erit infinitus. Ubi vero radii adveniant paralleli, punctum dirigens radios refractos dicetur absolute focus lentis, ac ejus distantia a lente dicetur absolute distantia focalis.

§. II.

Denominationes, & formulæ generales.

6. PONEMUS primo loco sex denominationes usui futuras in formulis finalibus, in quibus quærantur radii sphæricitatum, & distantiæ focales lentium acromaticarum; tum addemus denominationes quatuor adhibendas in formulis generalibus, ex quibus illæ finales erui debent.

I Ra-

I	Rationes sinuum pro radiis mediis in substantiis lentium (*)	m, m', m''
II	Ratio differentiarum pertinentium ad extremos	$\frac{dm}{dm'} \ldots n$
III	Ratio $\frac{m-1}{m'-1}$	c
IV	Radii sphæricitatum	a, b, a', b', a'', b''
V	Distantiæ focales singularum lentium	h, h', h''
VI	Distantia focalis lentis compositæ e binis vel ternis	H
VII	Distantia puncti dirigentis radios incidentes in lentes singulas	p, p', p''
VIII	Distantia puncti dirigentis radios refractos a singulis lentibus	r, r', r''
IX	Distantia puncti dirigentis radios refractos a lente composita	R
X	Semidiameter aperturæ communis lentium omnium	e

7. Accedent valores nonnulli subsidiarii

I $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$

II(**) $q = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4(m+1)}{apf} + \frac{3m+2}{p^2f}\right)\frac{1}{2}e^2$

III Formentur eodem modo q', q'' ex m', a', f', & m'', a'', f'', & erit

$$q' = \frac{m'-1}{m'}\left(\frac{m'^3}{f'^3} - \frac{2m'^2+m'}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{a'^2f'} + \frac{3m'^2+m'}{p'f'^2} - \frac{4(m'+1)}{a'p'f'} + \frac{3m'+2}{p'^2f'}\right)\frac{1}{2}e^2$$

$$q'' = \frac{m''-1}{m''}\left(\frac{m''^3}{f''^3} - \frac{2m''^2+m''}{a''f''^2} + \frac{m''+2}{a''^2f''} + \frac{3m''^2+m''}{p''f''^2} - \frac{4(m''+1)}{a''p''f''} + \frac{3m''+2}{p''^2f''}\right)\frac{1}{2}e^2.$$

(*) Est hic m', quod in capite superiore erat M, & f', quod ibi erat g.

(**) Hi valores q, q' sunt iidem, ac in superiore capite ρ, & σ divisi per $\frac{1}{2}e^2$ Hinc error figuræ sphæricæ hic num. 10 est $R^2(q+q')\frac{1}{2}e^2$, qui ibi fuerat $R^2(\rho+\sigma)$.

8. Error figuræ sphæricæ erit pro lente composita e binis lentibus $R^2(q+q')\frac{1}{2}e^2$, pro composita e tribus $R^2(q+q'+q'')\frac{1}{2}e^2$.

9. Habebuntur autem plures æquationes, quas proponemus sequentibus numeris: earum aliquæ adsunt in illo ipso Clairautii Opusculo, & in mea prima veteri dissertatione, aliæ facile deducuntur ex iisdem: eæ sunt fundamentum omnium, quæ hic consequentur.

$$\frac{1}{r}=\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p},\ \frac{1}{r'}=\frac{m'-1}{f'}+\frac{1}{p'},\ \frac{1}{r''}=\frac{m''-1}{f''}+\frac{1}{p''}.$$

10. Si radii ad lentem quampiam adveniant paralleli; erit valor p infinitus (num. 5), adeoque $\frac{1}{p}=0$, quo casu evadit $\frac{1}{r}=\frac{1}{h}$: Hinc $\frac{1}{h}=\frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'}=\frac{m'-1}{f'}$, $\frac{1}{h''}=\frac{m''-1}{f''}$.

11. Ubi plures lentes sunt contiguæ, & negligitur crassitudo, evadit punctum dirigens radios incidentes in lentem sequentem illud, quod erat punctum dirigens radios refractos a præcedente: Hinc habebitur

$$\text{I}\quad \frac{1}{p'}=\frac{1}{r}=\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p}=\frac{1}{h}+\frac{1}{p}.$$

$$\text{II}\quad \frac{1}{p''}=\frac{1}{r'}=\frac{m'-1}{f'}+\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p}=\frac{1}{h'}+\frac{1}{h}+\frac{1}{p}.$$

$$\text{III}\quad \frac{1}{r''}=\frac{m''-1}{f''}+\frac{m'-1}{f'}+\frac{m-1}{f}+\frac{1}{p}$$

12. Patet, errorem diversæ refrangibilitatis radiorum extremorum destrui; si in egressu e binis, vel ternis lentibus valor r', vel r'' remaneat idem pro ipsis radiis extremis. Id autem fiet; si in casu binarum lentium fuerit $\frac{dm'}{f'}+\frac{dm}{f}=0$, in casu trium $\frac{dm''}{f''}+\frac{dm'}{f'}+\frac{dm}{f}=0$, adeoque eadem æquatio destruet errorem diversæ refrangibilitatis lentis compositæ, sive radii adveniant ad ipsam divergentes, sive paralleli, sive convergentes, cum valor p non remaneat in æquatione deducta.

13. Patet itidem, si radii adveniant ad primam lentem paralleli,

leli, debere evanescere in omnibus valoribus $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ postremum terminum $\frac{1}{p}$, quo casu erit & R$=$H. Hinc, & ex num. 10 patet, fore

I Pro composita ex binis $\frac{1}{H} = \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h}$.

II Pro composita ex ternis $\frac{1}{H} = \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f} = \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h}$.

14. Pro destructione erroris figuræ sphæricæ satis patet, debere poni in casu compositæ ex binis $q + q' = 0$, ex ternis $q + q' + q'' = 0$, cum totus error ducatur in valorem communem R^2, & $\frac{1}{2}e^2$, per quem æquatio corrigens ipsum errorem dividi poterit, remanente illa, quam proponimus.

15. In singulis formulis q, q', q'' poterit fieri divisio per m, m', m'' applicatas singulis terminis inclusis intra parenthesim: potest autem etiam tota æquatio dividi per $m'-1$, qua divisione instituta recedet $m'-1$ e valore q', & in valore q habebitur pro factore $\frac{m-1}{m}$, factor $\frac{m-1}{m'-1} = c$; qui idem erit factor valoris q''; si tertia lens fuerit ex eadem substantia, ac prima, adeoque $m'' = m$. Præterea si agatur de objectivo, quod excipit radios delatos ab objecto admodum remoto, adeoque inter se parallelos ad sensum; evanescente $\frac{1}{p}$, evanescent in primo valore q postremi tres termini, qui habent eam fractionem pro factore, adeoque relinquentur e formula q tantum tres priores termini, e singulis reliquarum duarum seni.

16. Hinc habebuntur binæ æquationes sequentes, quarum prima destruet errorem diversæ refrangibilitatis, secunda errorem figuræ sphæricæ.

I Pro composita ex binis $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} = 0$, ex ternis $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} = 0$

II Pro priore priores duæ, pro posteriore omnes sequentes formulæ $= 0$

$$c\left(\frac{m^2}{f^3} - \frac{2m+1}{af^2} + \frac{m+2}{ma^2f}\right)$$

$$\frac{m'^2}{f'^3} - \frac{2m'+1}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{m'a'^2f'} + \frac{3m'+1}{p'f'^2} - \frac{4(m'+1)}{m'a'p'f'} + \frac{3m'+2}{m'p'^2f'}$$

$$c\left(\frac{m^2}{f''^3} - \frac{2m+1}{a''f''^2} + \frac{m+2}{ma''f''} + \frac{3m+1}{p''f''^2} - \frac{4(m+1)}{ma''p''f''} + \frac{3m+2}{mp''^2f''}\right)$$

17. Accedent his ex num. 7 I æquationes sequentes

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f},\ \frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'},\ \frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{f''}.$$

18. Quod si lens fuerit isoscelia; erit $a = -b$, $a' = -b'$, $a'' = -b''$; adeoque $\frac{1}{f} = \frac{2}{a} = -\frac{2}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{2}{a'} = -\frac{2}{b'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{2}{a''} = -\frac{2}{b''}$, tum $a = 2f$, $a' = 2f'$, $a'' = 2f''$.

19. Præterea ex num. 10 habebitur $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'} = \frac{m'-1}{f'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{m-1}{f''}$, & ex num. 13 pro composita e binis $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$, pro composita e ternis $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m-1}{f''}$: ac inde & ex num. 11 $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{p''} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$.

20. Quæcumque usui futura erunt in posterum, continentur omnia postremis hisce quatuor numeris; si iis addantur denominationes numeri *6*: valores autem $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ usum habebunt tantummodo pro reductione æquationis destruentis errorem figuræ sphæricæ, quæ habetur secundo loco num. *16*.

21. Monendum hic illud tantummodo, correctionem errorum per illas binas æquationes non obtineri accuratam, sed proximam. In expressione erroris figuræ sphæricæ omissi sunt termini continentes factorem habentem pro numeratore potentias superiores semidiametri aperturæ e, qui sunt ordinum inferiorum, sed sunt aliquid:

quid : si autem & ipsi involverentur ; calculus esset nimis complicatus : & quoniam non omnes termini essent multiplicati per eandem potentiam ipsius e ; positis aliis valoribus pro e , obvenirent determinationes aliæ ita , ut radii sphæricitatum , qui destruerent errorem figuræ sphæricæ pertinentem ad radios incidentes in lentem in una distantia a centro ejus aperturæ , non destruerent errorem pertinentem ad incidentes in alia distantia . Pariter valor $\frac{m-1}{f} + \frac{1}{p}$, ex quo deductus est valor $\frac{dm}{f}$, non exprimit accurate $\frac{1}{r}$, sed proxime , omissis nimirum terminis inferioribus : præterea ego quidem inveni , experimentis institutis in pluribus substantiis , binas substantias non conjungere , nisi bina tantum radiorum genera , quod fuse exposui in secunda ex illis toties memoratis veteribus dissertationibus , & hîc itidem in Opusculo I. Eam etiam ob causam adhibeo valorem m debitum radiis mediis , & dm respondentem extremis : ex ea positione minus errabitur , quam si pro m assumeretur valor debitus primis rubeis minime omnium refrangibilibus , quod fieri deberet , si quæreretur unio binorum extremorum tantummodo , appellatâ ratione sinuum , quæ pertinet ad primos rubeos m , & eâ , quæ pertinet ad extremos violaceos $m + dm$.

22. Hisce omnibus præmissis , jam facilis evadit generalium formularum applicatio , tam ad theoriam ocularium compositarum , in quibus corrigatur solus error diversæ refrangibilitatis , quam ad casum objectivorum , in quibus corrigatur uterque . Ubi agitur de binis componentibus , habentur 4 radii sphæricitatum determinandi ; ubi de tribus habentur sex , quibus determinatis , habentur inde omnes distantiæ focales , nimirum distantia focalis lentis compositæ , & eæ , quæ pertinent ad componentes , quæ sunt binæ in primo casu , tres in secundo , adeoque habentur quatuor indeterminationes in primo , sex in secundo . Unam determinationem inducit unitas aliqua , quæ sit totius systematis basis quædam , & exhibeat scalam communem pro omnibus ejus partibus : tum pro ocularibus addit unam æquatio corrigens errorem

rem diversæ refrangibilitatis, & pro objectivis addit aliam æquatio corrigens errorem figuræ sphæricæ. Hinc relinquuntur in systemate ocularium aliæ determinationes duæ pro binis componentibus, quatuor pro tribus, & in systemate objectivorum una sola pro primo casu, tres pro secundo.

23. Pro unitate omnium maxime opportuna est distantia focalis totius lentis compositæ: nam si deinde hæc requiratur dati linearum numeri; per eum numerum multiplicati cæteri omnes radiorum, & distantiarum focalium, habebuntur & ipsi in lineis. Aliquando tamen unitatem ipsam determinabit aliquis e radiis, qui sit datus, ut ubi libeat adhibere unam aliquam formam, quæ jam habetur: sic etiam plures determinationes induci possunt a pluribus formis datis, ut si adhibenda sit una lens jam data, vel in casu trium componentium binæ. Verum ad faciliorem calculum assumemus hic initio pro unitate valorem f, vel ejus dimidium, vel duplum: ex æquationibus, & ex aliis determinationibus arbitrariis eruentur fractiones $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{h''}$, $\frac{1}{H}$. Si valor $\frac{1}{H}$ inventus dividatur per valorem inventum fractionis cujusvis; obtinebitur valor ejus denominatoris respondens unitati $= H$. Nam dividendo $\frac{1}{H}$ per $\frac{1}{a}$, habetur $\frac{a}{H}$, ubi facto $H = 1$, habetur valor a. At si radius quispiam, ut a', jam sit datus in partibus scalæ cujuspiam datæ ex forma, vel ex lente adhibenda, & numerus ipsum exprimens dicatur g; ea fractio ducenda erit in g, & dividenda per valorem cujusvis alterius fractionis ad habendum denominatorem hujus in partibus ejusdem scalæ: nam si novus valor ejus denominatoris in partibus ejus scalæ sit x; erit $\frac{1}{a} : \frac{1}{a'} :: g : x$.

24. Determinationes, quæ relinquuntur, erunt arbitrariæ, adeoque infinitæ numero combinationes haberi possunt, quæ corrigant etiam utrumque errorem simul, inter quas seligendæ sunt eæ, quæ maxime utiles videbuntur. Tres substantiæ diversæ possunt

sunt conjungere tres colores, & in illa ipsa secunda e meis ipsis veteribus dissertationibus memoratis, quæ est eadem ac duarum Bononiensium secunda, habentur formulæ, quæ id exhibent (*): eo casu requirerentur tres lentes diversarum substantiarum omnes, adeoque non deberet supponi $m'' = m$; sed pro errore diversæ refrangibilitatis præter æquationem secundam numeri 12, quæ mutato terminorum ordine est $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} = 0$, adhibente valores dm pertinentes ad radios extremos; adhibenda esset alia similis $\frac{dM}{f} + \frac{dM'}{f'} + \frac{dM''}{f''} = 0$, in qua valores dM pertinerent ad colorem alterum ex extremis comparatum cum medio; vel potius dm deberet exhibere differentiam valorum m pertinentium ad quempiam medium collatum cum altero ex extremis, & dM ad eundem collatum cum extremo opposito, exhibentibus m, m', m'' valores, qui pertinent ad radios medios, & retineri deberent in omnibus aliis æquationibus, & formulis. Sed oportet habere substantias, quarum qualitates distractivæ respectu eorum binariorum diversorum colorum sint satis diversæ inter se ad exhibendas combinationes curvaturarum idoneas, quas nondum inveni, & ad eam etiam rem Optica expectat opem artis chemicæ.

25. Pro systemate radiorum sphæricitatis, tam ubi agitur de ocularibus, quam ubi de objectivis, seligendæ sunt semper ex combinationes, quæ exhibent ipsos radios longiores; quia quo longior est radius pari distantia focali totius lentis, cui respondere debet apertura, eo pauciores gradus sui circuli continebit arcus ipsi respondens, quod minuit errores ortos e quantitatibus neglectis. Si aliquis radius obveniat nimis exiguus; illa combinatio debet rejici. Pro objectivo nullam admitterem, in qua aliquis radius occurreret multo minor triente distantiæ focalis totius lentis compositæ, ut pro ocularibus evitari debet, quantum fieri potest, apertura major dimidio radio sphæricitatis.

26. Ubi

(*) Eas hic proponemus in uno e supplementis melius concinnatas.

26. Ubi agitur de ocularibus, indeterminationes reliquæ possunt esse usui ad evitanda alia vitia, quæ a nonnullis combinationibus aliquando inducuntur; sed perquisitio methodi, qua ea vitia corrigantur, est multo operosior: illud est omnium pessimum, quo objectum deformatur curvatis in imagine aucta per telescopium lineis, quæ in ipso objecto sunt rectæ. Id vitium oritur ab errore quodam figuræ sphæricæ, vi cujus augmentum imaginis est majus prope margines campi, quam circa medium (*). Æquatio, qua utimur pro correctione erroris figuræ sphæricæ in objectivis, non potest applicari ocularibus, quia in ea supposuímus radios advenientes ad lentem e distantia satis magna, ut haberi possint pro parallelis, quam ob causam in formula II generali num. 16 omissi sunt postremi tres termini. Ad oculares plerumque deveniunt radii divergentes a punctis, vel convergentes ad puncta parum remota a lente: in eo casu si adhuc adhibenda esset correctio erroris figuræ sphæricæ; calculus evaderet magis complicatus pro ocularibus, quam pro objectivis, & diversa determinatio requireretur pro singulis ocularibus, respondens valori p distantiæ puncti dirigentis radios incidentes, qui in oculares ipsas non incidunt paralleli, ut in objectivum.

27. Applicabimus formulas generales paragrapho 3°. ocularibus, 4°., & 5°. objectivis, & pro utrisque agemus prius de binis componentibus, tum de tribus. Semper autem assumemus secundam solam concavam ex substantia minus distrahente: pro oculari composita ex binis assumemus primam convexam isosceliam, tum secundam vel isosceliam etiam ipsam, vel cum superficie interna congruente: pro composita ex tribus media erit semper concava, & isoscelia, extremæ duæ convexæ, & æquales, ac vel isosceliæ etiam ipsæ, vel cum superficiebus internis cnngruentibus, quo casu erunt positæ ordine inverso ita, ut prima superficies sit æqualis postremæ, ac mediæ æquales inter se. Pro objectivis evolvemus paragrapho 4°. systema binarum componentium cum 4 casibus,

(*) De eo fuse agemus initio tomi II, ubi plurima occurrent futura magni momenti pro theoria ocularium.

bus, in quorum primo prima lens sit isoscelia, in secundo superficies internæ congruant, in tertio lens prima sit data, in quarto sit data lens secunda: tum paragrapho 5 agemus de tribus componentibus cum 4 diversis casibus. In primo lentes extremæ erunt isosceliæ, & æquales, in secundo priores duæ isosceliæ, & cum sphæricitatibus æqualibus, in tertio omnes tres isosceliæ, in quarto media isoscelia, & superficies internæ congruentes (*). Patebit ex hisce exemplis, quid agendum in aliis determinationibus arbitrariis.

§. III.

Pro ocularibus compositis ex binis, vel ternis.

28. PRO binis componentibus ponemus $f = 1$: erit (num. 16. I) $dm + \frac{dm'}{f'} = 0$, adeoque $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} = -u$. Hinc (num. 10) $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$ (num. 19) $= m - 1 - u(m'-1)$, qui valor dicatur u'. Erit pro prima lente isoscelia (num. 18) $\frac{2}{a} = -\frac{2}{b} = \frac{1}{f} = 1$, adeoque $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$: tum pro primo casu lentis secundæ isosceliæ $\frac{2}{a'} = -\frac{2}{b'} = \frac{1}{f'} = -u$, adeoque $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{2}u$: pro secundo superficierum internarum congruentium $\frac{1}{a'} = \frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'}$ (numer. 17) $= -\frac{1}{2} + u$.

29. Ut hi valores reducantur ad unitatem æqualem H; valor

(*) Applicatio ad plures alios casus habebitur in uno e supplementis per formulas R. P. Gaudiberti juxta id, quod innuimus in præfatione totius hujusce tomi I.

lor $\frac{1}{H} = u' = m - 1 - u(m' - 1)$ debet dividi (num. 23) per valores $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ hic inventos. Hinc habebuntur formulæ sequentium numerorum, in quorum primo ponemus valorem u', qui erat idem, ac $\frac{1}{H}$, semel inveniendum in iis numeris, qui referuntur ad præcedentem unitatem, tum novus valor $H = 1$, ac deinde ille valor u' divisus per valores fractionum relativarum ad unitatem ipsam veterem, ex qua divisione prodibunt denominatores earundem fractionum relativi ad hanc unitatem novam.

I Pro utroque casu .... $u' = m - 1 - u(m' - 1)$, $H = 1$,

$$h = \frac{u'}{m-1},\ h' = -\frac{u'}{u(m'-1)},\ a = -b = 2u'.$$

II Pro primo utriusque lentis isosceliæ ... $a' = -b' = -\frac{2u'}{u}$.

III Pro secundo superficierum congruentium .... $a' = -2u'$, $b' = \frac{2u'}{2u-1}$.

30. Pro tribus componentibus ponemus $f = 2$: erit (num. 16) $\frac{1}{2} dm + \frac{dm'}{f'} + \frac{1}{2} dm = 0$, adeoque ut prius $dm + \frac{dm'}{f'} = 0$, & $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} = -u$. Hinc (num. 19) $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$: & quoniam (num. 27) ambæ extremæ sunt æquales in utroque e binis casibus, quos evolvimus; erit $f'' = f = 2$, adeoque etiam $\frac{1}{h''} = \frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h} + \frac{1}{h'}$ $= (m-1) - u(m'-1)$ valor idem, qui num. 28 factus est $= u'$.

31. In primo casu omnium lentium isosceliarum, erit (num. 18) $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{a''} = -\frac{1}{b''} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{2}u$. In secundo casu superficierum internarum congruentium erit, ut in primo, valor $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{2}u$ ob isoscelismum secundæ lentis,

tis, adeoque & $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$: tum $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b''} =$ (numer. 7. I) $\frac{1}{f} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$. Diviso per hosce valores $\frac{1}{H} = u'$, ut num. 29, habebitur

I Pro utroque casu . . . . . $u' = m - 1 - u(m' - 1)$, $H = 1$, $b = h'' = \frac{2u'}{m-1}$, $h' = -\frac{u'}{u(m'-1)}$, $a' = -b' = -\frac{2u'}{u}$

II Pro primo casu omnium isosceliarum . . . . . $a = -b = a'' = -b'' = 4u'$.

III Pro secundo superficierum congruentium . . . $a = -b'' = \frac{2u'}{1-u}$, $b = -a'' = -\frac{2u'}{u}$.

§. IV.

Pro objectivo composito e binis.

32. Posito hic etiam $f = 1$, ut num. 28, erit itidem, prorsus ut ibi, $\frac{1}{f'} = -u$, $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = m - 1 - u(m'-1) = u'$.

33. Pro determinandis radiis sphæricitatum oportebit adhibere æquationem, factis $= 0$ prioribus binis formulis numeri 16. II, in quibus ponendum erit $\frac{1}{f} = 1$, $\frac{1}{f'} = -u$, tum (num. 19) $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f} = m - 1$. Factis hisce substitutionibus orietur æquatio adhuc indeterminata

$$cm^2 - \frac{c(2m+1)}{a} + \frac{c(m+2)}{ma^2} - u^3 m'^2 - \frac{u^2(2m'+1)}{a'} - \frac{u(m'+2)}{m'a'^2}$$

$$+ u^2(3m'+1)(m-1) + \frac{4u(m'+1)(m-1)}{m'a'} - \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{m'} = 0$$

34. Fiat $A = cm^2 \ldots B = c(2m+1) \ldots C = \frac{c(m+2)}{m}$

$A' = u^3 m'^2 \ldots B' = u^2(2m'+1) \ldots C' = \frac{u(m'+2)}{m'}$

$D' = u^2(3m'+1)(m-1) \ldots\ldots\ldots E' = \frac{4u(m'+1)(m-1)}{m'}$

$F' = \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$

$G = B' - E'$

$I = A + D' - A' - F'$: habebitur æquatio

$$\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{C'}{a'^2} - \frac{G}{a'} + I = o:$$

35. Præterea ex num. 17 erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$.

36. Jam nova determinatio arbitraria distinguet casus quatuor, quos proposuimus num. 27.

37. In primo casu prima lens isoscelia exhibebit (num. 28) $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$. Hoc valore substituto in æquatione numeri 34, & mutatis omnibus signis, erit

$\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} - I - \frac{1}{4}C + \frac{1}{2}B = o$: tum $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$.

38. In secundo casu superficies internæ congruentes exhibebunt $\frac{1}{a'} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, unde fiet $\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1$. Hoc valore substituto in æquatione num. 34 erit $\frac{C - C'}{a^2} - \frac{B + G - 2C'}{a} + I + G - C' = o$: tum $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$.

39. In hisce casibus diviso valore $\frac{1}{H}$ per valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$ hìc inventos, habebuntur (num. 23) valores a, b, a', b', h, h' respondentes valori $H = 1$. Porro facile perspicitur, valores h, h' in utroque casu, & a, b in primo obventuros hìc prorsus eosdem, ac num. 29.

40. Pro casu 3, & 4, erunt cogniti numeri scalæ cujuspiam exprimentes radios sphæricitatum lentis datæ: dicantur g, g', & fiat

fiat $n = \frac{g}{g'}$; sed cavendum, in prima lente utrinque convexa debere esse g valoris positivi, g' negativi, & in secunda utrinque concava e contrario g valoris negativi, g' positivi.

41. In tertio casu valor $\frac{a}{b}$, adhibitis a, & b hic inventis dependenter ab unitate hic assumpta, erit idem, ac $\frac{g}{g'}$, cum numeri exprimentes easdem quantitates dependenter ab unitate quacunque debeant habere semper rationem eandem ad se invicem. Quare erit $\frac{a}{b} = n$, & $\frac{1}{b} = \frac{n}{a}$; qui valor cum sit (num. 35) $= \frac{1}{a} - 1$; erit $1 = \frac{1}{a} - \frac{n}{a}$, adeoque $\frac{1}{a} = \frac{1}{1-n}$. Hoc valore substituto in æquatione numeri 34, & mutatis signis, erit $\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} - 1 - \frac{C}{(1-n)^2} + \frac{B}{1-n} = 0$; tum $\frac{1}{a} = \frac{1}{1-n}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$. Valor $\frac{1}{a}$ hic inventus multiplicatus per g, & divisus per valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$ exhibebit a', b', h, h', H in partibus ejusdem scalæ, in quibus erat $a = g$, $b = g'$, juxta num. 23.

42. In quarto casu lentis secundæ datæ erit pariter $\frac{1}{a'} = \frac{1}{1-n}$. Hoc valore substituto in æquatione numeri 34, erit $\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} + 1 - \frac{C'}{(1-n)^2} - \frac{G}{1-n} = 0$; tum $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{a'} = \frac{1}{1-n}$. Hic postremus valor ductus in g, & divisus per $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$, exhibebit a, b, h, h', H in partibus ejusdem scalæ, in quibus jam habebatur $a' = g$, $b' = g'$.

§. V.

§. V.

De objectivo composito e ternis.

43. PRO hoc objectivi genere proposuimus evolvendos (numer. 27) casus 4. Primus habet lentes extremas isoscelias, & æquales; secundus priores duas isoscelias cum distantiis focalibus æqualibus; tertius omnes tres isoscelias; quartus mediam isosceliam cum superficiebus internis congruentibus. In primo invenietur $\frac{1}{a}$ per æquationem gradus secundi; in secundo $\frac{1}{a''}$ per æquationem itidem gradus 2; in tertio, & quarto $\frac{1}{a''}$ per æquationem gradus tertii, ex qua tamen pro tertio casu eruetur deinde æquatio gradus secundi.

44. Prima æquatio (num. 16. I) dividendo per dm', & ponendo u pro $\frac{dm}{dm'}$, evadit $\frac{u}{f} + \frac{1}{f'} + \frac{u}{f''} = 0$. Secunda habebitur ponendo $= 0$ omnes tres formulas ejusdem numeri 16. II, ubi nexus valorum a, a', a'', f, f', f'', p', p'', qui æquationem determinet, eruetur per numeros 17, 18, 19 ex conditionibus singulorum casuum.

CASUS I.

Lentes extremæ isosceliæ, & æquales.

45. Ponatur in hoc casu $f = 2$, ut num. 30 & æqualitas extremarum efficiet $a'' = a$, $b'' = b$, adeoque $\frac{1}{a''} - \frac{1}{b''} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, sive $\frac{1}{f''} = \frac{1}{f} = \frac{1}{2}$: quamobrem æquatio numeri 44 evadet $\frac{1}{2}u + \frac{1}{f'} + \frac{1}{2}u = 0$, adeoque habebitur $\frac{1}{f'} = -u$, prorsus ut num. 30, & 32.

46. Hinc ex numer. 19 fiet $\frac{1}{h} = \frac{1}{h''} = \frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{h'} =$

$-u$

$-u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = m - 1 - u(m'-1) = u'$, ut num. 32. Præterea ex eodem num. 19 erit $\frac{1}{p'} = \frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{p''} = \frac{1}{2}(m-1) - u(m'-1)$, qui valor fiet $= c'$.

47. Isoscelismus efficiet (num. 18) $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{a''} = -\frac{1}{b''}$ $= \frac{1}{2f} = \frac{1}{4}$, & ex num. 17 erit $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} + u$.

48. Hisce valoribus substitutis in æquatione num. 16. II orientur sequentes tres formulæ

$$\text{I} \quad \frac{1}{8}cm^2 - \frac{c(2m+1)}{16} + \frac{c(m+2)}{32m}$$

$$\text{II} \quad -u^2m'^2 - \frac{u^2(2m'+1)}{a'} - \frac{u(m'+2)}{m'a'^2} + \frac{1}{2}u^2(3m'+1)(m-1)$$
$$+ \frac{2u(m'+1)(m-1)}{m'a'} - \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{4m'}$$

$$\text{III} \quad +\frac{1}{8}cm^2 - \frac{c(2m+1)}{16} + \frac{c(m+2)}{32m} + \frac{1}{4}cc'(3m+1) - \frac{cc'(m+1)}{2m}$$
$$+ \frac{cc'^2(3m+2)}{2m} = 0$$

49. Priores tres termini primæ, ac tertiæ formulæ uniri poterunt, ac adjectis postremis tribus tertiæ, habebuntur 12 termini, qui exhibebunt æquationem ope denominationis sequentis:

$A = \frac{1}{4}cm^2 \ldots\ldots B = \frac{1}{8}c(2m+1) \ldots C = \frac{c(m+2)}{16m}$

$D = \frac{1}{4}cc'(3m+1) \ldots E = \frac{cc'(m+1)}{2m} \ldots F = \frac{cc'^2(3m+2)}{2m}$

$A' = u^2m'^2 \ldots\ldots B' = u^2(2m'+1) \ldots C' = \frac{u(m'+2)}{m'}$

$D' = \frac{1}{2}u^2(3m'+1)(m-1) \ldots E' = \frac{2u(m'+1)(m-1)}{m'}$

$F' = \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{4m'}$,

$G = B' - E'$,

$I = B + E + A' + F' - A - C - D - F - D'$, ubi

ubi $c = \frac{m-1}{m'-1}$, $c' = \frac{1}{2}(m-1) - u(m'-1)$.

50. His positis, habebitur æquatio $\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} + 1 = 0$, quæ exhibebit valorem $\frac{1}{a'}$: accedent ex numeris 46, & 47 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{a''} = -\frac{1}{b''} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$, $\frac{1}{h} = \frac{1}{h''} = \frac{1}{2}(m-1)$ $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = m-1 -u(m'-1)$.

51. Hic postremus valor $\frac{1}{H}$ divisus per valores omnium præcedentium fractionum exhibebit (num. 23) valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' ad unitatem $= H$, ut num. 39.

52. Si calculus numericus institutus fuerit pro objectivo composito ex duabus lentibus, ubi num. 34 habentur valores analogi hisce numeri 49, facile 9 ex hisce 12 deducentur ex iis sine ullo, vel sine longiore novo calculo. A', B', C' erunt hic iidem, qui ibi: tum $A = \frac{1}{4}A$, $B = \frac{1}{8}B$, $C = \frac{1}{16}C$, $D' = \frac{1}{2}D'$, $E' = \frac{1}{2}E'$, $F' = \frac{1}{4}F'$. Novus calculus instituendus erit tantummodo pro novis D, E, F; unde provenient novi G, & I. Valores autem $\frac{1}{H}$, $\frac{1}{h'}$, h', erunt hic iidem, ac ibi, $\frac{1}{h}$ dimidius illius, h duplus: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ dimidii eorum, qui ibi habentur in casu 1, a, b dupli. Valor h respondens $H = 1$ erit idem, quotiescumque adhibitæ fuerint binæ solæ substantiæ cum unica concava, quotcumque lentes adhibeantur, & quocumque ordine.

CASUS II.

Binæ priores isosceliæ cum sphæricitatibus contrariis æqualibus.

53. Ponatur in hoc casu $f = 1$, ac ob isoscelismum, & sphæricitates contrarias æquales, erit $a = -b = -a' = b'$, adeoque $\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$; sive (num. 7), $\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = -1$:

-1: quamobrem æquatio numeri 44 evadet $u - 1 + \frac{u}{f''} = 0$; sive $\frac{1}{f''} = \frac{1}{u} - 1$, quem valorem hic dicemus u'.

54. Hinc ex num. 19 fiet $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -(m'-1)$; $\frac{1}{h''} = u'(m-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = m - m' + u'(m-1)$, & facto $m' - m = c'$, erit $\frac{1}{H}$ etiam $= -c' + u'(m-1)$. Præterea ex eodem num. 19 erit $\frac{1}{p'} = m - 1$, $\frac{1}{p''} = m - 1 - (m'-1)$ $= m - m' = -c'$.

55. Isoscelismus ex num. 18 exhibebit $\frac{1}{a} = \frac{1}{2f}$, adeoque erit num. 53) $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}$, & ex num. 17 erit $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - u'$.

56. Hisce valoribus substitutis in æquatione numeri 16. II orientur sequentes tres formulæ.

$$\text{I} \ldots\ldots cm^2 - \tfrac{1}{2}c(2m+1) + \frac{c(m+2)}{4m}$$

$$\text{II} \ldots -m'^2 + \tfrac{1}{2}(2m'+1) - \frac{m'+2}{4m'} + (3m'+1)(m-1) - \frac{2(m'+1)(m-1)}{m'} - \frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$$

$$\text{III} \ldots cu'^2m^2 - \frac{cu'^2(2m+1)}{a''} + \frac{cu'(m+2)}{ma''^2} - cc'u'^2(3m+1) + \frac{4cc'u'(m+1)}{ma''} + \frac{cc'^2u'(3m+2)}{m} = 0$$

57. In hoc casu requirentur plures positiones:

$A = cm^2 \ldots\ldots B = \frac{1}{2}c(2m+1) \ldots C = \frac{c(m+2)}{4m}$

$A' = m'^2 \ldots\ldots B' = \frac{1}{2}(2m'+1) \ldots C' = \frac{m'+2}{4m'}$

$D' = (3m'+1)(m-1) \ldots\ldots\ldots\ldots E' = \frac{2(m'+1)(m-1)}{m'}$

$F' = \frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'} \ldots A'' = cu'^2m^2 \ldots B'' = cu'^2(2m+1)$

$C'' = \frac{cu'(m+2)}{m} \ldots\ D'' = cc'u'^2(3m+1) \ldots\ E'' = \frac{4cc'u'(m+1)}{m}$

$F'' = \frac{cc'^2u'(3m+2)}{m}$

$G = B'' - E''$

$I = A + C + B' + D' + A'' + F'' - B - A' - C' - E' - F' - D''$,

ubi $c = \frac{m-1}{m'-1}$, $c' = m' - m$, $u' = \frac{1}{u} - 1$.

58. His positis habebitur æquatio $\frac{C''}{a''^2} - \frac{G}{a''} + I = 0$, quæ exhibebit valorem $\frac{1}{a''}$: accedent ex numeris 55, & 54 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - u'$, $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -(m'-1)$, $\frac{1}{h''} = u'(m-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = -c' + u'(m-1)$, qui postremus valor divisus per præcedentes exhibebit, ut num. 51, valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' relatos ad unitatem $= H$.

59. Plures e valoribus numeri 57 haberi possunt breviore calculo ex iis, qui pro duabus lentibus inventi sunt num. 34; si pro iis jam adhibitus fuerit calculus numericus: ponendo primo loco valores novos hìc inveniendos, secundo illos inventos ibi, erit $A = A$, $B = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{4}C$, $E' = \frac{E'}{2u}$, $F' = \frac{F'}{u}$, $A'' = u'^2A$, $B'' = u'^2B$, $C'' = u'C$. Reliqui A', B', C', D', D'', E'', F'' facilius, vel æque facile invenientur immediate ex coefficientibus hìc expressis, quorum ipsorum coefficientium plures jam habebuntur cum suis logarithmis in calculo pro valoribus numeri 34.

CASUS III.

Omnes tres lentes isosceliæ.

60. Calculus pro hoc casu evadit multo complicatior, cum debeat deveniri ad æquationem gradus tertii, quæ tamen hìc in fine dividetur in duas, alteram gradus primi, alteram secundi. Reduce-

ducemus prius ope isoscelismi, & æquationis primæ numeri 44 omnes valores adhibendos in æquatione secunda numeri 16 ad quantitates cognitas, & $\frac{1}{a''}$, ut & fractiones reliquorum, qui quæruntur: occurrent bina binomia, quorum prioris habebuntur & quadratum, & cubus, posterioris quadratum, quod numeros terminorum auget plurimum: ad evitandam confusionem progrediemur lento passu per plures novas denominationes, & substitutiones.

61. Ponatur hic $f = \frac{1}{2}$, & ob isoscelismum (num. 18) habebuntur $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{b'} = -\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{f'} = \frac{2}{a'}$, $\frac{1}{b''} = -\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{f''} = \frac{2}{a''}$. Hinc æquatio numeri 44 evadet $2u + \frac{2}{a'} + \frac{2u}{a''} = 0$, sive $\frac{1}{a'} = -u - \frac{u}{a''}$.

62. Tum (num. 19) fiet $\frac{1}{h} = 2(m-1)$, $\frac{1}{h'} = \frac{2(m'-1)}{a'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{2(m-1)}{a''}$, qui valores hic etiam inveniri poterunt, sed post inventum $\frac{1}{h''}$, & per ipsum $\frac{1}{h'}$; adeoque tum etiam obtinebitur valor $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$.

63. Ex eodem num. 19 erit $\frac{1}{p'} = 2(m-1)$, $\frac{1}{p''} = 2(m-1) + \frac{2(m'-1)}{a'} = 2(m-1) - 2u(m'-1) - \frac{2u(m'-1)}{a''}$, qui valor, si ponatur $2(m-1) - 2u(m'-1) = u'$, fiet $= u' - \frac{2u(m-1)}{a''}$, ubi valor u' erit duplus illius valoris u', qui superius jam habebatur numero 29.

64. Reductis hoc modo valoribus $f, f', f'', a, a', p', p''$ ad a'', & quantitates datas, fiet substitutio in æquatione secunda gradatim: substituentur prius 2, 1, $\frac{2}{a'}$, $\frac{2}{a''}$, $2(m-1)$, pro $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{p'}$; tum inverso terminorum ordine $-\frac{u}{a''} - u$ pro $\frac{1}{a'}$, &

$-\frac{2u(m'-1)}{a''} + u'$ pro $\frac{1}{p''}$. Prima substitutio reducet tres formulas numeri 16 II ad sequentes

I. $8cm^2 - 4c(2m+1) + \frac{2c(m+2)}{m}$.

II. $\frac{8m'^2}{a'^2} - \frac{4(2m'+1)}{a'^2} + \frac{2(m'+2)}{m'a'^2} + \frac{8(3m'+1)(m-1)}{a'^2} - \frac{16(m'+1)(m-1)}{m'a'^2}$
$+ \frac{8(3m'+2)(m-1)^2}{m'a'^2}$

III. $\frac{8cm^2}{a''^2} - \frac{4c(2m+1)}{a''^2} + \frac{2c(m+2)}{ma''^2} + \frac{4c(3m+1)}{p''a''^2} - \frac{8c(m+1)}{mp''a''^2} + \frac{2c(3m+2)}{mp''^2a''}$

65. Secunda substitutio relinquet primam formulam, uti erat; nimirum sine ulla mutatione: in secunda formula ob binomium $\frac{1}{a'} = -\frac{u}{a''} - u$ exhibebit pro singulis e prioribus tribus terminis quaternos, pro quarto, & quinto ternos, pro sexto binos; nam est $\frac{1}{a'^2} = \frac{u^2}{a''^2} + \frac{2u^2}{a''} + u^2$, & $\frac{1}{a'^3} = -\frac{u^3}{a''^3} - \frac{3u^3}{a''^2} - \frac{3u^3}{a''}$ $- u^3$: in tertia formula ob binomium $\frac{1}{p''} = -\frac{2u(m'-1)}{a''} + u'$ relinquet priores terminos, uti sunt, pro quarto, & quinto exhibebit binos, pro sexto ternos; est enim $\frac{1}{p''^2} = \frac{4u^2(m'-1)^2}{a''^2}$ $- \frac{4uu'(m'-1)}{a''} + u'^2$.

66. Prima formula remanebit hic in prima linea, tum sequentes quatuor continebunt valores provenientes a secunda ita, ut singulæ columnæ contineant terminos ortos e singulis ipsius terminis, tum postremæ tres lineæ continebunt simili pacto terminos ortos ex tertia. Orientur formulæ sequentes, quas cum latitudo paginæ non caperet, eadem amplianda fuit. Poterant ordinari alio pacto, sed, ne inter imprimendum mutaretur textus, qui respondet huic formæ, eadem retenta est, & pagina ampliata, adhibitis etiam litterulis minoribus, ut amplitudo evaderet quamminima fieri posset.

$8cm^2$

$$8cm^2 - 4c(2m+1) + \frac{2c(m+2)}{m}$$

$$-\frac{8u^3m'^3}{a'^3} + \frac{4u^3(2m'+1)}{a'^3} - \frac{2u^3(m'+2)}{m'a'^3}$$

$$-\frac{24u^3m'^3}{a'^2} + \frac{12u^3(2m'+1)}{a'^2} - \frac{6u^3(m'+2)}{m'a'^2} + \frac{8u^2(3m'+1)(m-1)}{a'^2} - \frac{16u^2(m'+1)(m-1)}{m'a'^2}$$

$$-\frac{24u^3m'^3}{a'} + \frac{12u^3(2m'+1)}{a'} - \frac{6u^3(m'+2)}{m'a'} + \frac{16u^2(3m'+1)(m-1)}{a'} - \frac{32u^2(m'+1)(m-1)}{m'a'} - \frac{8u(3m'+2)(m-1)^2}{m'a'}$$

$$-8u^3m'^3 + 4u^3(2m'+1) - \frac{2u^3(m'+2)}{m'} + 8u^2(3m'+1)(m-1) - \frac{16u^2(m'+1)(m-1)}{m'} - \frac{8u(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$$

$$+\frac{8cm^2}{a'^3} - \frac{4c(2m+1)}{a'^3} + \frac{2c(m+2)}{ma'^3} - \frac{8cu(m'-1)(3m+1)}{a'^3} + \frac{16cu(m'-1)(m+1)}{ma'^3} + \frac{8cu^2(m'-1)^2(3m+2)}{ma'^3}$$

$$+\frac{4cu^2(3m+1)}{a'^2} - \frac{8cu^2(m+1)}{ma'^2} - \frac{8cuu'(m'-1)(3m+2)}{ma'^2}$$

$$+\frac{2cu'^2(3m+2)}{ma'}$$

67. Jam vero patet, in linea prima, & quinta contineri terminos cognitos, in secunda, & sexta a'^3, in tertia, & septima a'^2, in quarta, & octava a'. Inde obtinebitur æquatio gradus tertii, pro qua fient positiones non multum absimiles a præcedentibus: notetur autem, coefficientes trium terminorum priorum lineæ sextæ esse eosdem, ac in linea prima: pro iis adhibebuntur A, B, C: tum A', B', C', D', E', F' aptabuntur singuli singulis columnis linearum 2, 3, 4, 5 ita, ut contineant partem earum communem, toto discrimine consistente in numeris præfixis. Pro postremis septem terminis reliquis ponentur I, I' in columna quarta, K, K' in quinta, L, L', L'' in sexta; licet habeant nonnullos valores communes: nam habent plures diversos: demum ponentur M, N, P, Q pro summis terminorum pertinentium ad a'^3, a'^2, a', & summa carentium incognitâ.

68. Eo pacto habebuntur denominationes sequentes

$$A = 8cm^2 \;.\;.\;.\;.\; B = 4c(2m+1) \;.\;.\;.\; C = \frac{2c(m+2)}{m}$$

$$A' = 8u^3m'^3 \;.\;.\;.\; B' = 4u^3(2m'+1) \;.\;.\;.\; C' = \frac{2u^3(m'+2)}{m'}$$

$$D' = 8u^2(3m'+1)(m-1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; E' = \frac{16u^2(m'+1)(m-1)}{m'}$$

F' =

$F' = \frac{8u(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$ ..... $I = 8cu(m'-1)(3m+1)$

$I' = 4cu'(3m+1)$ .... $K = \frac{16cu(m'-1)(m+1)}{m}$

$K' = \frac{8cu'(m+1)}{m}$ .... $L = \frac{8cu^2(m'-1)^2(3m+2)}{m}$

$L' = \frac{8cuu'(m'-1)(3m+2)}{m}$ ... $L'' = \frac{2cu''(3m+2)}{m}$,

$M = A + C + B' + K + L - B - A' - C' - I$, $N = 3B' + D' + I' - 3A' - 3C' - E' - K' - L'$, $P = 3B' + 2D' + L'' - 3A' - 3C' - 2E' - F'$, $Q = A + C + B' + D' - B - A' - C' - E' - F'$.

69. Habebitur æquatio $\frac{M}{a''^3} + \frac{N}{a''^2} + \frac{P}{a''} + Q = 0$, quæ exhibebit $\frac{1}{a''}$: accedent ex numeris 61, & 62 $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{u}{a''} - u$, $\frac{1}{b''} = -\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{h} = 2(m-1)$; $\frac{1}{h'} = -\frac{2(m'-1)}{a'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{2(m-1)}{a''}$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$. Hic postremus valor divisus per valores omnium præcedentium fractionum exhibebit, ut num. 51, valores quæsitos $a, b, a', b', a'', b'', h, h', h''$ respondentes valori $H = 1$ (*).

CA-

(*) Æquatio, quæ hic obvenit gradus tertii, dividitur in duas, quarum altera $\frac{1}{a''} + 1 = 0$, altera $\frac{M}{a''^2} + \frac{N-M}{a''} + Q = 0$. Id quidem ego non animadverti, nisi ubi substitutis numeris desumptis ab iis qualitatibus vitrorum, quas adhibebo in exemplis numericis capitis IV, resolutio ejus æquationis post longos, & molestos calculos numericos mihi exhibuit valorem $\frac{1}{a''} = -1$, contrarium, & æqualem valori $\frac{1}{a}$, quem num. 61 habueram $= 1$ ex illa positione arbitraria $f = 2$. Id quidem initio me perculit: expectaveram enim valorem $\frac{1}{a''}$ positivum, qualis nimirum pertineret ad lentem convexam. At ubi animadverti æqualitatem cum $\frac{1}{a}$ negative assumpto, vidi tertiam lentem destruere omnem effectum primæ; unde mihi patuit, hanc hujus æquationis radicem exhibuisse combinationem, in qua lentes extremæ essent contrariæ, & æquales, cum intermediâ abeunte in vitrum habens utramque superfi-

CASUS IV.

Media isoscelia, & superficies internæ congruentes.

70. Ponatur hic $f = 1$, ut num. 53, & erit (num. 17) $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, tum ob isoscelismum secundæ lentis $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'}$, & $\frac{1}{f} = \frac{2}{a'}$ (num. 18), ac ob congruentiam $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{a''}$. Ex hisce formulis reducentur hic etiam valores omnes ad $\frac{1}{a''}$ determinandum ope æquationis gradus tertii.

71. Nam

perficiem planam, quæ itidem nullum effectum ederet; nam ea etiam combinatio pertinet ad casum trium lentium isosceliarum, in quarum conjunctione ambo errores evanescant, quæ combinatio idcirco ab eadem æquatione exprimi debuerat. Et quidem id ita se habere, mihi statim patuit consideranti, valorem $\frac{1}{a'} = -n - \frac{n}{a''}$ (num. 61). Facto enim $\frac{1}{a''} = -1$, evadit $\frac{1}{a'} = -n + n = 0$, quod ostendit, valorem a' esse infinitum, nimirum primam superficiem lentis secundæ evasisse planam, adeoque etiam secundam ob isoscelismum.

Idcirco posito $\frac{1}{a''} = -1$, tota æquatio debet evanescere, quod omnino inveniretur facta substitutione ejus valoris in omnibus terminis æquationis inventæ gradus tertii: sed facilius cernitur in formulis num. 64, ex quibus ipsa est deducta. Ibi tota secunda formula evanescit, cum singuli termini ducti sint in $\frac{1}{a'} = 0$. Tres termini tertiæ formulæ facto $\frac{1}{a''} = -1$, evadunt iidem, ac tres primæ cum signis contrariis; ac proinde illos elidunt: remanent tres postremi formulæ tertiæ, qui facto itidem $a'' = -1$, evadunt $= \frac{2c}{mp''} \times (6m^2 + 2m - 4m - 4 - \frac{3m+2)}{p''}$. Quatuor priores termini valoris inclusi parenthesi exhibent $6m^2 - 2m - 4$. Postremus evolvetur, posito pro $\frac{1}{p''}$ suo valore, qui (num. 63) est $= 2(m-1) + \frac{2(m^2-1)}{a'} = 2(m-1)$, ob $\frac{1}{a'} = 0$. Id reducit ipsum postremum terminum ad $-(3m+2) \times (2m-2) = -(6m^2 + 4m - 6m - 4) = -(6m^2 - 2m - 4)$; qui, cum sit valor idem, ac summa, ad quam reduximus priores quatuor, præcedatur autem a signo negativo, illam destruit.

Patet inde, valorem $\frac{1}{a''} = -1$, esse unam e radicibus ejus æquationis, quæ idcirco debet posse dividi per $\frac{1}{a''} + 1 = 0$. Divisio instituta relinqueret æqua-

71. Nam erit $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{a''}$, adeoque $\frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a''}$, tum æquatio numeri 44 evadit $u - \frac{2}{a''} + \frac{u}{f''} = 0$, sive $\frac{1}{f''} = -1 + \frac{2}{ua''}$, & (num. 17) $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} + 1 - \frac{2}{ua''}$: si fiat ibi $u'' = \frac{2}{u} - 1$; erit $\frac{1}{b''} = 1 - \frac{u''}{a''}$: tum $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -\frac{2(m'-1)}{a''}$, $\frac{1}{h''} = -(m-1) + \frac{2(m-1)}{ua''}$,

$\frac{1}{H}$

---

quationem gradus secundi continentem reliquas binas radices. Divisio actualis ob tantam terminorum multiplicitatem esset pene inextricabilis; sed eam supplet natura generalis earum æquationum, in quibus primus terminus caret coefficiente. In iis coefficiens secundi termini est summa radicum omnium acceptarum cum signo contrario, & postremus productum ex multiplicatione omnium ita acceptarum. Inde, cognitâ jam unâ radice, facile invenitur tam coefficiens secundi termini æquationis quæsitæ gradus secundi, quam tertius ejus terminus, atque id eo facilius hic, quod radix cognita est -1, adeoque ipsa accepta cum signo contrario est $= 1$. Satis erit liberare primum terminum æquationis inventæ gradus tertii a coefficiente per divisionem, demere unitatem a coefficiente novo secundi termini, & retinere postremum, qui divisus per unitatem remanet idem.

Æquatio, facto $\frac{1}{a''} = x$, erat $Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$, adeoque $x^3 + \frac{Nx^2}{M} + \frac{Px}{M} + \frac{Q}{M} = 0$. Coefficiens secundi termini æquationis quæsitæ erit $\frac{N}{M} - 1 = \frac{N-M}{M}$, adeoque ipsa æquatio $x^2 + \frac{N-M}{M}x + \frac{Q}{M} = 0$, sive $Mx^2 + (N-M)x + Q = 0$, nimirum $\frac{M}{a''^2} + \frac{N-M}{a''} + Q = 0$, uti fuerat propositum.

Patet inde, valorem P remanere inutilem; & ut servetur ordo litterarum, pro hoc valore Q hic invento ponemus P in capite sequenti, quod continebit solas formulas finales adhibendas pro usu, & in quarto, in quo habebuntur exempla cum calculis numericis.

Æquatio $\frac{1}{a''} + 1 = 0$ præbens radicem -1 non potest habere usum pro telescopiis; quia objectivum inde proveniens radios non colligit ad efformandam imaginem objecti; cum ejus focus abeat in infinitum; adeoque pro ipsis remanet sola illa æquatio gradus secundi, quæ erit $\frac{M}{a''^2} + \frac{N-M}{a''} + P = 0$.

$\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{2(m-1)}{ua''} - \frac{2(m'-1)}{a''}$, & $\frac{1}{p'} = m - 1$,
$\frac{1}{p''} = m - 1 - \frac{2(m'-1)}{a''}$, juxta num. 19.

72. Sic habentur omnes valores substituendi in æquatione numeri 16 II: $\frac{1}{f} = 1$, $\frac{1}{f'} = -\frac{2}{a''}$, $\frac{1}{f''} = -1 + \frac{2}{ua''}$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{p'} = m - 1$, $\frac{1}{p''} = m - 1 - \frac{2(m'-1)}{a''}$. Binomia valorum $\frac{1}{f''}$, & $\frac{1}{p''}$ iterum inducunt multiplicitatem terminorum, & quidem adhuc majorem. In prima, & secunda formula singuli termini reddunt singulos, adeoque ex ipsis habentur 9: sed in tertia primus terminus reddit 4 ob f''^3, secundus 3 ob f''^2, tertius 2 ob f'', quartus 8 ob $p'' f''^2$, quintus 4 ob $p'' f''$, sextus 8 ob $p''^2 f''$, adeoque omnes simul evadunt 38. Patet methodus evolvendi hunc etiam casum; sed nobis hìc satis erit ipsam tantummodo indicasse. Alia ejus evolutio habebitur in supplemento I.

§. VI.

Considerationes nonnullæ pertinentes ad casus præcedentes, & alios.

73. MONUIMUS num. 21, correctionem errorum diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ non fore accuratam, sed proximam ob plures rationes ibidem indicatas; hìc monebimus, etiam distantias focales non fore accuratas ob crassitudinem lentis neglectam; quæ si vocaretur in calculum; is evaderet multo magis complicatus. Crassitudo in objectivo erit semper perquam exigua respectu totius distantiæ focalis; sed in ocularibus erit multo major respectu ejusdem; nam in iis oportebit assumere multo plures gradus circuli ad habendam aperturam respondentem campo tolerabili: adhuc tamen in iis etiam distantia focalis hìc definita non multum abludet a vera, nec id discrimen nocebit

effectui lentis ocularis acromaticæ, ubi ipsam adhibere libeat: ejus distantia focalis accurata invenietur facile excipiendo in plano ultra ipsam sito imaginem objecti remoti, quæ distantia ita cognita adhiberi poterit pro ejus idonea collocatione respectu aliarum lentium, & oculi.

74. Determinatis radiis, & distantiis focalibus, quæ corrigant binos errores propositos juxta formulas traditas, poterit, si libeat, determinari quantitas erroris, qui remanet, adhibità trigonometrià, quæ multo accuratius docebit vias radiorum. Poterit institui calculus tam pro radio rubeo primo, quam pro violaceo extremo, & tam pro radio generis utriuslibet incidente in marginem aperturæ, quam pro incidente in punctum medium inter centrum, & marginem, atque id pro singulis superficiebus; dum formula simplex, & accurata exhiberet occursum cum axe radii incidentis in punctum infinite proximum axi. Sed quod pertinet ad diversam refrangibilitatem, oporteret adhibere seorsum valorem *m* exprimentem rationem sinuum pro primis rubeis, & pro postremis violaceis; dum in formulis hic adhibitis habetur unicus valor *m* pro eadem substantia, cum sola ratione valorum *dm* pertinentium ad binas, quæ conjunguntur. Præterea pro radio quovis post incidentiam in quamvis superficiem præcedentem oporteret determinare punctum superficiei sequentis, in quod is incidit, quod pendet a crassitudine, & curvatura singularum lentium. Ratio calculi ineundi non pertinet ad geometriam sublimem; sed calculus evadit admodum prolixus ob multitudinem superficierum. Porro ibi etiam punctum dirigens radios refractos a quavis superficie præcedente esset accipiendum pro puncto dirigente radios incidentes in superficies proxime sequentes.

75. Ad obtinendam aberrationem radii cujuspiam mediæ refrangibilitatis ab extremis, oporteret nosse non solum valores *m* pertinentes ad extremos, sed etiam eum; qui pertinet ad ipsum medium in utravis substantia. Ea perquisitio est multo magis delicata ob ipsam exiguitatem differentiæ, & difficultatem maximam adhibendi easdem prorsus trium colorum species, dum post determinationem valorum *m* pertinentium ad ipsas in prima, quærun-

runtur iidem in secunda. Exposui in Opusculo I methodum ejus determinationis, quæ etiam necessaria esset ad determinationem curvaturarum per formulas aptatas tribus substantiis diversis idoneis ad unionem colorum extremorum cum medio: sed hîc agimus de unione, quæ fieri potest per binas substantias, quæ est tantummodo binorum colorum.

76. Ubi ingentes aperturæ aptantur objectivis compositis e binis lentibus, plerumque occurrunt tot gradus curvaturæ lentis convexæ, ut quantitates ordinum inferiorum neglectæ in formulis pertinentibus ad errorem figuræ sphæricæ non solum exhibeant partem residuam non exiguam ejus erroris pertinentis ad radios incidentes prope margines aperturæ collatos cum incidentibus prope centrum; sed etiam aliam fortasse multo majorem ejusdem pertinentis ad radios incidentes in puncta aperturæ intermedia inter centrum, & margines collata cum iisdem centralibus. Posset determinari combinatio curvaturarum, quæ tolleret penitus utrumque errorem, & conjungeret tam radios incidentes in marginem aperturæ, quam illos, qui incidunt in ea puncta intermedia cum incidentibus in centrum, & prope ipsum: ad eam rem adhiberetur in objectivo composito ex binis determinatio illa, quæ hîc adhibita est arbitraria, & in composito e tribus una e tribus determinationibus, quæ ibi remanent arbitrariæ (num.22); sed id admodum difficulter præstaretur per formulas generales calculo fere inextricabili ob multiplicitatem terminorum. Adhibenda esset potius methodus falsæ positionis, quæ tamen ipsa requireret longam calculorum numericorum seriem. Mihi omnino persuasum est, posse eâ viâ obtineri telescopia dioptrica multo meliora iis, quæ nunc habemus, & censeo esse abunde idoneas methodos, quas habeo pro deducendis ope observationum rite instituendarum qualitatibus refractivis, & distractivis substantiarum adhibendarum. Sed calculorum numericorum prolixitas me sane ab eo opere deterret, potissimum dum adhuc deest methodus certa parandi satis magnam copiam vitrorum naturæ accurate æqualis; ut calculi ineundi possint esse usui pro satis magno telescopiorum numero. Si tandem ars chemica eo in genere opem tule-

rit Dioptricæ, & exhibuerit binorum, vel potius trium generum vitra naturæ semper constantis; erit utique operæ pretium, subire labores quosvis pro determinanda combinatione curvaturarum, quæ maximam plurimorum radiorum unionem inducat. Ea omnia satis erit hìc tantummodo indicasse, ut pateat, quam vastus hic campus sit, ad novas in eo semper, & uberiores segetes colligendas.

77. Valores dati, & quæsiti continentur omnes initio numeri sexti. Quæruntur præcipue radii sphæricitatum a, b, a', b', a'', b'', sive relatio ipsorum mutua in aliquo unitatum genere, quæ unitas, quæcunque sit, lens iis sphæricitatibus prædita æque corriget binos errores diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ. Eorum inventio innititur valoribus m, m', qui determinant qualitatem refractivam binorum vitrorum, & valori $u = \frac{dm}{dm'}$, qui determinat rationem qualitatum distractivarum: ex hisce tribus, & illis radiis per ipsos inventis invenirentur etiam distantiæ focales singularum lentium h, h', h'', & lentis compositæ H in eodem unitatum genere, in quo inventi sunt radii ipsi: sed hìc e formulis inventi sunt immediate soli valores fractionarii habentes pro numeratore unitatem, pro denominatore eos valores quæsitos, & deinde ope fractionum ipsarum admodum facile ii reducti sunt ad scalam habentem pro unitate ipsam distantiam focalem communem H. Id est præstitum semper, præter duos e casibus propositis num. 40, in quibus supponitur data una e binis lentibus, adeoque supponuntur dati radii sphæricitatum ipsius respondentes scalæ cujuspiam: eo casu valores reliqui, & valor ipse H reducti sunt ad partes scalæ ejusdem datæ. Omnes cæteri valores, qui habentur in toto hoc Opusculo, assumpti sunt ad inveniendas formulas finales, quæ exhibent valores ejusmodi radiorum, & distantiarum focalium; nec his tandem inventis habent ullum alium usum.

78. Porro valores m, m', u vix possunt haberi satis exacti usque ad partem millesimam totius: nam ad eos inveniendos adhibentur methodi, quæ non possunt ulterius progredi. Auctores plu-

plures in hoc argumento pertractando assumunt hosce valores fundamentales expressos numeris nimis brevibus, ut pro flint, & vitro communi valorem $\frac{dm}{dm'} = \frac{2}{3}$. Ii numeri non possunt esse satis accurati, nisi casu quopiam fortuito, nec combinationes inde deductæ possunt exhibere telescopia satis bona, nisi vel per attentationem, vel certa aliqua observandi methodo accuratiore determinentur minus erronei valores iidem, adhibitis pluribus notis numericis, qui quidem in diversis vitris communibus, & vero etiam in diversis flint delatis ex Anglia solent esse satis diversi.

79. Ego quidem adhibeo plures notas; sed accurationem ultra partes millesimas totius sperare non ausim: utor prismatis, quæ quidem, si rite adhibeantur, censeo, esse maxime omnium idonea ad obtinendos valores eosdem satis accuratos: at evolvo in Opusculo I methodum expeditam eos inveniendi ope ipsorum prismatum. Porro si prisma habeat angulum graduum 20, habebit minuta 1200, ubi error unius minuti in angulo est paulo minor parte millesima totius: plures autem anguli adhibentur ad eam rem, adeoque vix per multiplicationem observationum sperari potest accuratio pertingens ad partem millesimam; quamobrem inanis prorsus esset labor calculi producti longe ultra eum limitem. Hinc satis erit promovere ipsum calculum usque ad 4 notas; quod quidem opportune accidit, cum ad eam rem satis sint tabulæ logarithmorum communes, quæ pertingunt ad 10000 sine ulla necessitate partium proportionalium: inde vero fit, ut labor ejusmodi calculorum contrahatur mirum in modum.

80. Eam ob causam redactæ sunt omnes formulæ, quæ requirunt multiplicationem, ad factores simplices, quorum logarithmi facile inveniuntur immediate in tabulis, vel ubi occurrit divisor quipiam, ut in pluribus terminis habetur divisio per m, vel m', æque facile e tabulis eruitur immediate complementum arithmeticum logarithmi ejus termini addendum reliquis logarithmis ad habendum logarithmum producti totius, qui ex ejusmodi multiplicatione, & divisione oriri debet. Porro appello simplices etiam terminos $m-1$, $m+1$, $2m'+1$, $3m'+1$, ac similes, quia datis valo-

valoribus m, m' in numeris, etiam ii valores inveniuntur in ipsis numeris primo oculi ictu.

81. Proderit plurimum ad calculos numericos facilius, & tutius instituendos habere formulas finales separatas ab omnibus demonstrationibus, & animadversionibus, quod habebitur hic in capite tertio: tum servare ordinem satis idoneum in collocatione valorum algebraicorum cum suis numericis ad latus. Eum, quem censui aptissimum ad eam rem, proponam capite quarto in pluribus tabellis, ex quibus omnibus potest fieri unica tabula digesta in pagina satis ampla, ex qua facili intuitu possint assumi valores præcedentes adhibendi in sequentibus. Ad eam rem sufficit dimidium folii non nimis exigui.

82. In applicationibus ad casus particulares hic propositos deventum est, vel devenietur ad æquationem secundi gradus, cujus incognita est fractio $\frac{1}{a}$, vel $\frac{1}{a''}$: primus autem terminus habet ibi etiam ipse suum coefficientem cognitum. Si ea incognita dicatur x, æquatio habebit hanc formam $px^2 + qx + r = 0$. Dividendo per p habebitur $x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p} = 0$: adeoque facto $q' = \frac{q}{p}$, & $r' = \frac{r}{p}$, erit $x^2 + q'x + r' = 0$, unde eruitur $x = -\frac{1}{2}q' \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q'^2 - r')}$. Patebit in tabellis capitis quarti, quam facile ope logarithmorum deriventur q', r' ex datis p, q, r, calculo continuato eruetur & x, pro quo utemur ibidem valore suo $\frac{1}{a}$, vel $\frac{1}{a''}$. Facile itidem fractionum inventarum in unitatibus præcedentibus denominatores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' reducentur ibidem ope fractionis $\frac{1}{H}$ ad novam unitatem $= H$, quod est ultimus omnium calculorum scopus, & reddit expeditissimam eorum valorum reductionem ad numerum pollicum, vel linearum, data distantia focali H totius systematis in iisdem partibus.

83. Si in formula exprimente æquationem valor r' fuerit positi-

sitivus, & major valore $\frac{1}{4}q'^2$ invento ibi; æquatio habebit radices imaginarias, & problema erit impossibile: nimirum per objectivum compositum e binis vitris ejus generis, quod assumptum est, & cum iis conditionibus, e quibus profluxit ea æquatio, non poterit corrigi simul uterque error diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ.

84. Si valor r' fuerit negativus, & æqualis valori $\frac{1}{4}q'^2$; tum valor radicalis erit $=0$, & $x=-\frac{1}{2}q'$. Sed si r' fuerit valor negativus, vel positivus minor quam $\frac{1}{4}q'^2$; habebuntur bini valores $x=-\frac{1}{2}q'\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q'^2-r')}$, ex quibus profluent bina systemata superficierum sphæricarum corrigentium simul utrumque ex iis binis erroribus.

85. Ea systemata sic inventa poterunt adhiberi; nisi forte alterum ex iis contineat aliquem radium sphæricitatis nimis exiguum respectu distantiæ focalis totius, qua de re judicari poterit statim post inventos valores fractionarios $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{H}$, si enim quispiam e præcedentibus sit nimis magnus, respectu postremi, ut plus quam quadruplus; systema, in quo id accidet, debebit rejici, adeoque fieri poterit, ut cum æquatione habente radices reales solutio altera, vel utraque debeat ~~rejici ut~~ inepta.

86. In casu, ~~in quo habentur~~ binæ radices imaginariæ, si valor negativus inclusus signo radicali est exiguus; error figuræ sphæricæ, qui tum auferri penitus non potest; remanebit exiguus, & poterit esse minor eo, qui remanet in casu valorum realium ob terminos neglectos, immo etiam fieri poterit, ut ii duo errores se mutuo destruant. Eo casu debet assumi valor x, qui reddat eum errorem minimum cum systemate omnium sphæricitatum ipsi respondente. Is valor erit $-\frac{1}{2}q'$. Nam error totus est (*) (numer. 8) $R^2(q+q')\frac{1}{2}e^2$, vel $R^2(q+q'+q'')\frac{1}{2}e^2$. Is divisus per R^2,

(*) Satis patet, valores q, q', q'', qui occurrunt in sequenti formula, esse diversos a valore q' præcedenti. Illi habentur num. 7, & pertinent ad expressionem erroris figuræ sphæricæ, hic eruitur a coefficiente secundi termini q æquationis gradus secundi divisi per primum.

R'^2, & $\frac{1}{2}e^2$ (num. 14), tum per $m'-1$ (num. 15), & per valorem p (num. 82) exhibuit totum valorem æquationis redactæ demum ad $x^2+q'x+r'=0$. Quare valor totius erroris habetur valore primi membri ducto in $(m'-1)\frac{1}{2}e^2R^2p$. Porro hic valor est independens a valore $x=\frac{1}{a}$, vel $=\frac{1}{a''}$ inveniendo per ejusmodi æquationem, quod quidem patet de valore p, $m'-1$, & e. Patet autem etiam de valore R, qui in casu radiorum devenientium ab objecto remoto, evadit is, qui num. 6 est H: nam is valor invenitur in omnibus omnium superiorum casuum formulis independenter a valore a, vel a'', adeoque a valore x quæsito per eam æquationem, exhibitus nimirum a sola correctione erroris diversæ refrangibilitatis, & determinationibus arbitrariis assumptis. Quare error figuræ sphæricæ erit minimus, ubi $x^2+q'x+r'$ sit valor minimus; nimirum ubi $2xdx+q'dx=0$, & $x=-\frac{1}{2}q'$.

87. Assumpto eo valore x, & determinatis reliquis omnibus juxta formulas traditas, habebitur error minimus. Porro si in primo membro æquationis superioris ponatur hic valor pro x; habebitur $\frac{1}{4}q'^2-\frac{1}{2}q'^2+r'=-\frac{1}{4}q'^2+r'$: is est ille ipse valor, $\frac{1}{4}q'^2-r'$, qui inclusus signo radicali obvenerat negativus, acceptus hic positive. Inde profluit regula pro habenda quantitate erroris residui omnium minimi, ubi tolli non potest. Valor inclusus signo radicali sumptus positive multiplicetur per $\frac{1}{2}(m'-1)e^2H^2p$, ubi valor H invenitur per formulas, valor m' est datus, valor e est dimidia apertura, & valor p est is, qui habebatur num. 82 in æquatione nondum liberata a coefficiente primi termini.

88. Is error facile poterit comparari cum errore figuræ sphæricæ, qui haberetur in telescopio ejusdem distantiæ focalis habente objectivum constans unica lente simplici isoscelia ex eodem vitro communi cum apertura quavis e'. Pro eo erit $\frac{1}{H}=\frac{1}{h}=\frac{m-1}{f}$ (num. 10), adeoque $\frac{1}{f}=\frac{1}{(m-1)H}$, & $\frac{1}{a}=\frac{2}{f}$ (num. 28) $=\frac{2}{(m-1)H}$, adeoque $\frac{1}{f}=\frac{1}{(m-1)H}$. Hinc valor q, qui per num. 7, & 15

& 15 erat $= \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f}\right)$, erit $= \frac{m-1}{mf^3}(m^3 - 2(2m^2+m) + 4(m+2) = \frac{1}{(m-1)^2H^3} \times (m^3 - 2(2m+1) + \frac{4(m+2)}{m})$ error autem figuræ sphæricæ lentis unius per numerum 27, 29 capitis I est $= r^7\rho$, ubi r idem, ac hìc $h = H$, & ρ idem, ac hìc $q \times \frac{1}{2} e'^2$, adeoque is error erit hìc $= \frac{1}{2} H^2 q e'^2 = \frac{e'^2}{(m-1)^2 H} \times (\frac{1}{2} m^3 - (2m+1) + \frac{2(m+2)}{m})$.

89. Ii erunt errores longitudinales, nimirum exprimentes (cap. I num. 27.) distantiam puncti axis, ad quod convergunt radii incidentes in extremam aperturam, a puncto, ad quod convergunt radii incidentes in puncta infinite proxima centro aperturæ. Error circularis habet radium multo minorem. Verum adhuc ex collatione errorum longitudinalium ita factâ licebit conjicere, utrum adhiberi possit id systema, quod tamen melius innotescet post plura tentamina telescopiorum ita constructorum.

90. Plures alii casus poterant considerari tam pro duabus, quam pro tribus lentibus componentibus objectivum, quibus omnibus facile aptari possunt formulæ generales hìc traditæ. In casu duarum poterat considerari casus, in quo lens concava e flint sit isoscelia. Tum in æquatione (num. 34) $\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{C'}{a'^2} - \frac{G}{a'} + I = 0$, satis erit ponere $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$, nam est $\frac{1}{f'} = -u$ (num. 33), & in casu isoscelismi (num. 18) $\frac{2}{a'} = \frac{1}{f'} = -u$: tum æquatio evadit $\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{1}{4}C'u^2 + \frac{1}{2}Gu + I = 0$, ubi invento $\frac{1}{a}$ habetur & $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{2}u$.

91. Verum libuit potius evolvere binos illos casus, in quorum priore lens convexa est isoscelia, in posteriore superficies internæ congruunt. Hic posterior casus est utilior idcirco, quia minus luminis amittitur ex reflexione, ubi radius transit immedia-

te ex uno vitro in aliud, quam ubi ex priore vitro exit in aerem, & ex aere ingreditur in vitrum posterius: in primo casu habetur ibi unica reflexio, & quidem admodum tenuis, in secundo habentur binæ, & ambæ satis fortes; nam in mutatione medii eo plus luminis reflectitur, quo majus est mediorum discrimen. Prior autem ille casus est multo utilior idcirco, quia multo facilius videri potest, an superficierum curvaturæ sint eæ, quæ haberi debebant. Radius sphæricitatis superficierum concavarum facile definitur per focum reflexum ad punctum divergentiæ radiorum incidentium; & an superficies convexæ sint eæ, quæ debebant esse, sic itidem facile inveniri poterit.

92. Primo quidem an ea lens sit isoscelia, ut esse debuit, patebit excipiendo prope foramen, per quod radius ingreditur, imaginem fili traducti ante ipsum: ubi ea est maxime distincta, exhibet distantiam, qua determinata, invertenda est ipsa lens ita, ut secunda facies, quæ prius reflectebat radios ingressos, jam evadat prima, & illos excipiat ante ingressum. Distantia lentis ab ea imagine debet esse in utroque casu eadem; si lens est isoscelia: si ea distantia non sit prorsus eadem, jam patebit, haberi errorem constructionis; quia lens in eo casu non erit isoscelia. Ubi autem sit isoscelia, apparebit, an curvaturæ sint eæ, quæ debebant esse, excipiendo focum directum radiorum transmissorum trans lentem, qui determinabitur per imaginem ejusdem fili maxime distinctam. Is non erit focus radiorum parallelorum, sed divergentium a foramine. Verum si capiatur distantia lentis ab ipso foramine, & ab eo foco, ac earum distantiarum productum dividatur per earundem summam; quotus erit, juxta num. 100 Opusculi primi, distantia focalis ejus lentis pro foco objecti positi in immensa distantia, qui debet esse æqualis valori *h* eruto per calculum: si non obvenerit æqualis; habebitur itidem error constructionis. Idcirco ego semper præferrem hosce duos casus casui, in quo lens concava e flint sit isoscelia.

93. In casu concavæ isosceliæ non evadit isoscelia lens convexa. Potest quidem inquiri in curvaturas ejus superficierum methodo, quam exhibui in eodem Opusculo primo numero 106, inni-

innixa binis focis reflexis ad locum divergentiæ, & foco directo radiorum parallelorum: determinantur simul bini radii sphæricitatum, & valor m pertinens ad qualitatem refractivam ejus vitri.

94. In systemate binarum lentium componentium objectivum posuimus in omnibus formulis lentem convexam primo loco, nimirum obversam immediate objecto. Possunt eædem formulæ adhiberi etiam pro prima lente concava, & secunda convexa; ubi agitur de binis lentibus. Tum esset m id, quod prius fuerat m', & vice versa, & novus valor u esset unitas divisa per priorem u; deberet enim esse $\frac{dm}{dm'}$ id, quod prius fuerat $\frac{dm'}{dm}$. Illud tantummodo oporteret cavere in ea mutatione hypotheseos, quod unitas assumpta æqualis f, vel $\frac{1}{2}f$, vel $2f$, quæ erat positiva dum f pertinebat ad lentem convexam, evaderet negativa in hypothesi f pertinentis ad concavam. Quare cum ad eam unitatem relati sint omnes valores fractionarii; si sistendum esset in iis; deberet mutari signum: sed ubi valor $\frac{1}{H}$ dividitur per omnes ejusmodi valores, id ipsum ita corrigeretur, ut sine ulla mutatione deberent obvenire omnes valores cum suis signis debitis relati ad unitatem $= H$.

95. Ubi adhibentur tres lentes, res accideret secus. Si prima lens esset e flint; deberet esse & tertia, adeoque secunda sola e vitro communi, cum positum sit $m'' = m$, & distantia focalis lentis compositæ evaderet negativa, foco evadente negativo. Id sane fieri posset; si quis vellet lentem æquivalentem concavæ non convexæ, quod usum habere potest pro oculari concava adhibenda in telescopio Galileano, quod jam non est in usu, nisi pro exiguis, quæ tenentur unica manu, & adhibentur pro objectis parum remotis, ut in theatro. Telescopia ejusmodi cum lente oculari concava hujus formæ jam a pluribus annis elaborata ab amico in eo operum genere admodum exercitato habuerunt successum egregium. Objectivum non debet construi cum binis concavis, & una convexa; quia ipsum debet æquivalere lenti convexæ, & habere focum realem, in quo efformetur imago ob-

 jecti:

jecti : hinc debet summa convexitatum esse major, quam summa concavitatum : inutilis erit duplicatio lentis concavæ, & duplicanda potius convexa, ut curvatura distributa in quatuor superficies minuatur : nam curvatura nimis magna nocet perfectioni telescopii determinati per calculos negligentes plura, quæ in curvatura nimia evadunt majora, quam ut negligi possint.

96. Possent retineri binæ convexæ e vitro communi conjunctæ cum unica e flint, mutato ordine ita, ut eæ binæ convexæ sint simul conjunctæ, concavâ existente vel primâ, vel tertiâ. Verum in eo casu formulæ ipsæ subirent mutationem satis magnam. Si enim concava esset tertia; haberetur $m' = m$, & m'' id, quod prius fuerat m' : & si concava esset prima; tum haberetur $m' = m''$, & m esset id, quod prius fuerat m'. Non esset difficile mutare in eo casu omnia ita, ut demum deveniretur ad æquationes destruentes errorem figuræ sphæricæ simul cum altero diversæ refrangibilitatis. Et quidem ubi semel determinentur valores pertinentes ad lentes, quæ corrigant errorem diversæ refrangibilitatis, sive ipsæ sint binæ, sive sint tres, ea correctio æque habebit locum, utcumque mutetur ipsarum ordo, & utcumque ipsæ convertantur etiam mutata positione superficierum pertinentium ad singulas. Sed error figuræ sphæricæ, mutato superficierum ordine ita mutatur, ut necessarium sit servare eum ipsarum ordinem, quem calculus exhibuit, adeoque pro novo illo lentium ordine oportet omnino totum instaurare calculum tam algebraicum, quam numericum (*).

97. Conjunctio convexarum, quæ reddat concavam alteram e binis extremis, videtur collocatio innaturalis, & moris est semper

per

(*) Id quidem accidit fere semper : verum occurrent nobis inferius exempla pro casu trium lentium isoscelium, in quibus tertia lens fere æqualis primæ permittit ejusmodi inversionem. Eam autem permittit semper combinatio, in qua lens secunda est isoscelia, extremæ autem æquales, & positæ ordine contrario ita, ut postrema superficies æquetur primæ, penultima secundæ, qui est quintus e septem casibus evolutis a R. P. Gaudiberto, ut patebit in supplemento I hujus Opusculi, quæ combinatio idcirco est admodum utilis.

per collocare concavam e flint in medio. Adhuc tamen fieri posset aliquando, ut eo pacto obtinerentur combinationes magis idoneæ. Plerumque inveni in flint non habente ingentem vim distractivam valores imaginarios pro nonnullis e casibus trium lentium, quos evolvi: in aliis inveni curvaturas nimis magnas, adeoque ineptas: fortasse lens concava posita primo, vel postremo loco exhiberet reales in eo ipso casu, in quo collocata in medio exhibet imaginarias, & exhiberet fortasse curvaturas minores in casu, in quo exhibebat nimis magnas. Error figuræ sphæricæ destrui non potest per ullam combinationem binarum superficierum unius lentis, ubi agitur de radiis, qui ad illam deveniant paralleli, verum potest utique per binas etiam ex eodem vitro communi, ut patebit in Opusculo, quod habebitur initio tomi II: videtur, multo magis sperari posse ea correctio cum sphæricitatibus idoneis; si iis addatur tertia e flint vel ante ipsas, vel post, etiam in eo casu, in quo collocata in medio incurreret in imaginarietatem: saltem idipsum meretur examen.

98. Collocata lente concava in medio, habentur etiam pro tribus alii casus, qui possent evolvi, & qui fortasse exhiberent combinationes superficierum magis idoneas, ut si aliquæ e superficiebus adhibendis fierent planæ: possent ex. gr. ~~supponi omnes~~ tres lentes planæ in ~~priore sua~~ superficie: factis infinitis radiis a, a', a'': evanescerent omnes termini habentes pro denominatore eos valores, qui sunt plurimi, & formulæ evaderent multo simpliciores.

99. Etiam ratio assumpta inter valores f, & f'', a quibus pendent distantiæ focales lentium primæ, & tertiæ, quæ relinquit binas alias determinationes arbitrarias, reddit calculos multo simpliciores pro æquationibus pertinentibus ad objectiva composita e tribus lentibus. Occurrent in supplemento I hujus Opusculi plures applicationes factæ ad alios casus a R. P. Gaudiberto, ut innui in adnotatione ad num. *96*: adjiciam ibi alia plura pertinentia ad applicationes alias, quæ possint esse commodiores etiam, & fortasse utiliores. Interea vel hæc pauca, quæ hic evolvi communicata cum pluribus amicis, adjectis etiam combinationibus sphæricitatum inde erutis, habuerunt jam optimos successus.

100. Ha-

100. Habebuntur sane successus multo uberiores; ubi ars chymica demum invenerit methodum certam efformandi vitra habentia satis magnam vim distractivam, & densitatem internam uniformem, quorum raritas progressum hoc in genere retardavit hucusque. In Anglia ipsa ægre inveniuntur laminæ satis puræ e flint amplitudinis paullo majoris. Paucissima telescopia acromatica inde allata sunt, quæ ferant aperturam objectivi linearum 40, & dum hæc adjicio ad calcem hujus capitis jam olim conscripti, laminæ ad eam rem idoneæ nullæ jam ibidem obtineri possunt: habentur ægre pro aperturis linearum 30 casu occurrentes inter quamplurimas inutiles: aliis in locis tentamina vel cesserunt prorsus irrita, vel non exhibuerunt, nisi laminas amplitudinis admodum exiguæ, nec vero omnino puras. Cum aliquando obvenerint satis amplæ, & puræ; debet omnino haberi methodus certa eo perveniendi, quam debet deprehendere ars chymica, quæ per hæc tempora usque adeo excolitur: sed maxima Chymicorum pars occupata potissimum in exploranda natura diversarum specierum aeris hanc perquisitionem, quæ esset utilissima & Astronomiæ, & rei nauticæ, & vero etiam usui communi, neglexit huc usque potissimum ob impensas non mediocres necessarias ad eam rem, & negliget, nisi majorum præmiorum spe eorum industria excitetur, quod jam audio factum in Anglia, proposito mille anglicanorum aureorum præmio: sperandus inde successus aliquis: verum omnino optandum esset, ut æqualia, vel etiam majora præmia pluribus in locis proponerentur.

CAPUT III.

Denominationes, & formulæ finales.

1. In hoc capite non habentur nisi denominationes, & formulæ finales extractæ ex capite præcedenti. Quo pacto, quæ hic proponuntur, deducantur ex eo capite, patebit ex adnotationibus, quæ habebuntur in fine hujus capitis indicatæ per numeros 1, 2, 3, &c. Applicatio numerorum ad hosce valores algebraicos habebitur in capite sequenti (1).

§. I.

§. I.

Denominationes generales.

2. RATIO sinuum pro substantia minus, & pro magis distrahente pertinens ad radios medios . . . . m . . . m'

Ratio differentiarum pertinentium ad radios extremos $\frac{dm}{dm'}$ . . . . u

Valor subsidiarius $\frac{m-1}{m'-1}$ c

Radii sphæricitatum plurium lentium incipiendo ab ea, quæ prima excipit radios . . . . a, b, a', b', a'', b''

Distantiæ focales singularum lentium . . . . h, h', h''

Distantia focalis lentis compositæ . . . . H

3. Valores m, m', u sunt semper positivi: c solet itidem esse valor positivus existente m' majore, quam m, ut & dm' majore, quam dm.

4. Valores a, b, a', b', a'', b'' erunt positivi, vel negativi; prout directio radii sphæricitatis incipiendo a lente fuerit conformis, vel contraria directioni radiorum luminis advenientium.

5. Hinc prima superficies convexa, & secunda concava habebunt valorem radii sphæricitatis positivum: prima concava, & secunda convexa habebunt negativum.

6. Valores h, h', h'', H erunt positivi, vel negativi; prout focus fuerit realis, vel virtualis.

7. Hinc in lente utrinque convexa, vel magis convexa, quam concava, distantia focalis erit positiva, in concava utrinque, vel magis concava, quam convexa, erit negativa.

8. Superficies plana habebit radium sphæricitatis infinitum, & lens, quæ reddat parallelos radios luminis egredientes, habebit distantiam focalem infinitam.

§. II.

§. II.

Formulæ pro ocularibus (*).

9. Considerabuntur lentes compositæ e binis, & e ternis: in singulis speciebus casus bini.

10. In prima specie lentis compositæ e binis, casus primus habebit utramque lentem isosceliam, secundus superficies internas congruentes.

11. In secunda specie compositæ e ternis lentes extremæ erunt similes, & æquales: casus primus habebit omnes tres componentes isoscelias, secundus omnes internas superficies congruentes.

12. Nova denominatio (2) communis omnibus $\frac{1}{H} = u' = m - 1 - u(m' - 1)$.

Prima species ocularium

13. *Lens composita e binis.*

I. Pro utroque ... $h = \frac{u'}{m-1}$, $h' = -\frac{u'}{u(m'-1)}$, $a = -b = 2u'$.

II. Pro primo casu utriusque isosceliæ ... $a' = -b' = -\frac{2u'}{u}$.

III. Pro secundo casu primæ lentis isosceliæ, & superficierum congruentium ... $a' = -2u'$, $b' = \frac{2u'}{2u-1}$.

14 *Lens composita e ternis.* (3)

I. Pro utroque casu .... $h = h'' = \frac{2u'}{m-1}$, $h' = -\frac{u'}{u(m'-1)}$, $a' = -b' = -\frac{2u'}{u}$.

II. Pro primo casu omnium isosceliarum ..... $a = -b = a'' = -b'' = 4u'$.

III. Pro secundo superficierum congruentium ... $a = -b'' = \frac{2u'}{1-u}$, $b = -a'' = -\frac{2u'}{u}$.

§. III.

(*) Hæ formulæ corrigunt solum errorem diversæ refrangibilitatis pro ocularibus.

§. III.

Pro objectivo composito e binis.

15. PROPONENTUR primo loco denominationes, tum æquatio indeterminata pro a, & a': deinde considerabuntur 4 casus determinati per unam positionem arbitrariam: in primo lens prima erit isoscelia, in secundo superficies internæ congruentes, in tertio prima lens data, in quarto lens secunda data.

16. DENOMINATIONES (4).

$$A = cm^2 \ldots\ldots B = c(2m+1) \ldots\ldots C = \frac{c(m+2)}{m}$$

$$A' = u^3m'^2 \ldots\ldots B' = u^2(2m'+1) \ldots C' = \frac{u(m'+2)}{m'}$$

$$D' = u^2(3m'+1)(m-1) \ldots\ldots E' = \frac{4u(m'+1)(m-1)}{m'}$$

$$F' = \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$$

$$G = B' - E' \ldots\ldots I = A + D' - A' - F'.$$

17. Æquationes pro omnibus casibus.

$$\text{I.}\ \frac{1}{h} = m-1,\ \frac{1}{h'} = -u(m'-1),\ \frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\ (5).$$

$$\text{II.}\ \frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{C'}{a'^2} - \frac{G}{a'} + I = 0\ (6).$$

18. CASUS I.

Lens prima isoscelia.

$$\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} - I - \frac{1}{4}C + \frac{1}{2}B = 0,\ \frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u\ (7).$$

19. CASUS II.

Superficies internæ congruentes.

$$\frac{C-C'}{a'^2} - \frac{B+G-2C'}{a} + I + G - C' = 0,\ \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 1,$$
$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u\ (8).$$

20. In hisce binis casibus invento $\frac{1}{a'}$, vel $\frac{1}{a}$ per æquationem secundi gradus, habebuntur inde, & per reliquas æquationes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$. Diviso hoc postremo valore per præcedentes obvenient valores a, b, a', b', h, h' respondentes novæ unitati $=$ H (9).

21. CASUS III.

Lens prima data (10).

Numeri exprimentes radios sphæricitatum superficiei primæ, & secundæ sint g, g', tum $n = \frac{g}{g'}$. Habebuntur sequentes æquationes.

$$\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} - I - \frac{C}{(1-n)^2} + \frac{B}{1-n} = 0,\ \frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u.$$

22. Valor $\frac{g}{1-n}$ divisus per valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$ exhibebit valores a', b', h, h', H in partibus ejusdem scalæ, in quibus ex lente data habebantur g, & g', nimirum a, & b. Existentibus superficiebus lentis primæ convexis, debet fieri g positivum, g' negativum.

23. CASUS IV.

Lens secunda data (11).

Radii sphæricitatum lentis datæ sint itidem g, g', & $n = \frac{g}{g'}$: erit

$$\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} + I - \frac{C'}{(1-n)^2} - \frac{G}{1-n} = 0,\ \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1.$$

24. Va-

24. Valor $\frac{g}{1-n}$ divisus per $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$ exhibebit valores a, b, h, h', H in partibus ejusdem scalæ, in quibus jam habebantur $a' = g$, $b' = g'$. Si superficies lentis secundæ sint concavæ; numerus g debebit assumi negativus, g' positivus.

§. IV.

Pro objectivo composito ex ternis.

25. CONSIDERABIMUS casus tres, in quorum 1°. lentes extremæ ex substantia minus distrahente sint isosceliæ, & æquales: in 2°. priores duæ sint isosceliæ cum radiis sphæricitatum æqualibus: in 3°. omnes tres lentes sint isosceliæ.

26. Exhibebuntur pro singulis casibus valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{h''}$, $\frac{1}{H}$. Hic postremus divisus per præcedentes exhibebit valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' respondentes valori $H = 1$.

27. CASUS I.

Lentes extremæ isosceliæ, & æquales.

28. DENOMINATIONES.

$$c' = -\frac{1}{2}(m-1) + u(m'-1)$$

$$A = \frac{1}{4}cm^2 \ldots B = \frac{1}{8}c(2m+1) \ldots C = \frac{c(m+2)}{16m}$$

$$D = \frac{1}{4}cc'(3m+1) \ldots E = \frac{cc'(m+1)}{2m} \ldots F = \frac{cc''(3m+2)}{2m}$$

$$A' = \mu^3 m'^2 \ldots B' = u^2(2m'+1) \ldots C' = \frac{u(m'+2)}{m'}$$

$$D' = \frac{1}{2}u^2(3m'+1)(m-1) \ldots\ldots\ldots E' = \frac{2u(m'+1)(m-1)}{m'}$$

$$F' = \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{4m'}$$

 G=

$G = B' - E'$

$I = B + D + A' + F' - A - C - E - F - D'$ (12).

29. ÆQUATIONES.

$\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} + I = 0$, $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{a''} = -\frac{1}{b''} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$, $\frac{1}{h} = \frac{1}{h''} = \frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = m-1 - u(m'-1)$. Hic postremus valor divisus per valores præcedentium fractionum exhibebit valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' respondentes valori $H = 1$ (13).

30. Si jam inventi fuerint valores pro objectivo composito ex binis §. 3 num. 16; invenientur facile novem hìc quæsiti ex illis ibi inventis: erunt nimirum A', B', C' hìc iidem, ac ibi: tum A hujus $= \frac{1}{4}A$ illius, $B = \frac{1}{8}B$, $C = \frac{1}{16}C$, $D' = \frac{1}{2}D'$, $E' = \frac{1}{2}E'$, $F' = \frac{1}{4}F'$. Remanebunt inveniendi soli c', D, E, F, G, I. Erit autem itidem valor $\frac{1}{h'}$, & $\frac{1}{H}$ idem, ac ibi; $\frac{1}{h}$ erit dimidius inventi ibidem, ut & $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ dimidius valoris casus 1 §. 1. Hinc facto $H = 1$, erit h' idem, ac ibi, h duplus, & a, b duplus ejus primi casus, $a'' = a$, $b'' = b$. Quin immo valor h' respondens $H = 1$, erit idem, quotiescumque adhibitæ fuerint binæ solæ substantiæ cum unica concava ex magis refringente, quotcumque lentes adhibeantur, ex altera, & quocumque ordine (14).

31. CASUS II.

Binæ priores isosceliæ cum radiis sphæricitatum æqualibus.

32. DENOMINATIONES.

$c' = m' - m$, $u' = \frac{1}{u} - 1$

$A = cm^2 \ldots\ldots B = \frac{1}{2}c(2m+1) \ldots C = \frac{c(m+2)}{4m}$

A'=

$A' = m'^2 \ldots\ldots B' = \frac{1}{2}(2m'+1) \ldots C' = \frac{m'+2}{4m'}$

$D' = (3m'+1)(m-1) \ldots\ldots\ldots\ldots E' = \frac{2(m'+1)(m-1)}{m'}$

$F' = \frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'} \ldots A'' = cu'^2m^2 \ldots B'' = cu'^2(2m+1)$

$C'' = \frac{cu'(m+2)}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D'' = cc'u'^2(3m+1)$

$E'' = \frac{4cc'u'(m+1)}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots F'' = \frac{cc'^2u'(3m+2)}{m}$

$G = B'' - E''$

$I = A + C + B' + D' + A'' + F'' - B - A' - C' - E' - F' - D''$ (15).

33. ÆQUATIONES.

$\frac{C''}{a''^2} - \frac{G}{a''} + I = 0$, $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''}$ $- u'$, $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -(m'-1)$, $\frac{1}{h''} = u'(m-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h}$ $+ \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = -c' + u'(m-1)$. Hic postremus valor divisus per valores præcedentium fractionum exhibebit valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' respondentes valori $H = 1$ (16).

34. Hic etiam plures ex hisce valoribus invenientur facilius ex inventis in §. 3. Erunt $A = A$, $B = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{4}C$, $E' = \frac{E'}{2u}$, $F' = \frac{F'}{u}$, $A'' = u'^2A$, $B'' = u'^2B$, $C'' = u'C$. Reliqui A', B', C', D', D'', E'', F'' facilius, vel æque facile inveniuntur ex coefficientibus hic expressis, quorum ipsorum coefficientium plures jam occurrebant etiam ibidem, ut & valor $\frac{1}{h'}$ erit hic idem, ac ibi.

35. CA-

35. CASUS III.

Omnes tres lentes isosceliæ (17).

36. DENOMINATIONES.

$u' = 2(m-1) - 2u(m'-1)$

$A = 8cm^2 \ldots\ldots B = 4c(2m+1) \ldots\ldots C = \frac{2c(m+2)}{m}$

$A' = 8u'^3m'^2 \ldots B' = 4u'^3(2m'+1) \ldots C' = \frac{2u'^3(m'+2)}{m'}$

$D' = 8u'^2(3m'+1)(m-1) \ldots\ldots E' = \frac{16u'^2(m'+1)(m-1)}{m'}$

$F' = \frac{8u(3m'+2)(m-1)^2}{m'} \ldots\ldots I = 8cu(m'-1)(3m+1)$

$I' = 4cu'(3m+1) \ldots\ldots K = \frac{16cu(m'-1)(m+1)}{m}$

$K' = \frac{8cu'(m+1)}{m} \ldots\ldots L = \frac{8cu^2(m'-1)^2(3m+2)}{m}$

$L' = \frac{8cuu'(m'-1)(3m+2)}{m}$

$M = A + C + B' + K + L - B - A' - C' - I$, $N = 3B' + D' + I' - 3A' - 3C' - E' - K' - L'$, $P = A + C + B' + D' - B - A' - C' - E' - F'$.

37. ÆQUATIONES.

$\frac{M}{a'''} + \frac{N-M}{a''} + P = 0$, $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{u}{a''} - u$, $\frac{1}{b''} = -\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{h} = 2(m-1)$, $\frac{1}{h'} = \frac{2(m'-1)}{a'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{2(m-1)}{a''}$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = u'$. Hic postremus valor divisus per valores præcedentium fractionum exhibebit valores a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' respondentes valori $H = 1$ (18).

38. Hic itidem plures ex hisce valoribus invenientur facilius e valoribus inventis §. 3. Erunt $A = 8A$, $B = 4B$, $C = 2C$, $A' = 8A'$, $B' = 4uB'$, $C' = 2u'C'$, $D' = 8D'$, $E' = 4uE'$, $F' =$

$F' = 8F'$, & valor u' erit duplus valoris $\frac{1}{H}$ inventi ibi, valor $\frac{1}{h}$ duplus inventi ibidem (19).

---

1. Quæ hic habentur, ita sunt extracta ex capite præcedenti, ut omissa sint omnia iis ibi permixta, quæ non sunt necessaria pro usu, sed pertinent ad reliquorum demonstrationes.

2. Hic valor u', & H, & quæ habentur hic indicata sequentibus tribus numeris Romanis, excerpta sunt e numero 29 ejusdem capitis.

3. Valor u' est idem hic, ac in adnotatione præcedenti ex numero illius 31. I. Reliqua contenta hic sub tribus numeris Romanis sunt eadem, ac ibi eodem num. 31 sub iisdem.

4. Hæ denominationes habentur ibi num. 34.

5. Priores duo valores $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$ sunt hic iidem, ac ibi num. 32: $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$ eruitur hic ex illo ejusdem numeri, qui æquivalet huic, & invenitur hic ipse numeris 28, & 29, ex quibus ille ibi deducitur.

6. Hæc æquatio est hic eadem, ac ibi num. 34.

7. Hæ æquationes sunt hic eædem, ac ibi num. 37.

8. Hæ æquationes hic sunt eædem, ac ibi num. 38.

9. Hæc reductio ad unitatem $H = 1$ generalis hisce formulis habetur & ibi num. 39 eruta ex num. 23.

10. Quæ hic proponuntur pro hoc casu, habentur ibi num. 41, sed valor n, & quod pertinet ad signa valorum g, g', habetur ibi num. 40: itidem pro $\frac{1}{a}$, qui valor erat $= \frac{1}{1-n}$, ducendo in g, & dividendo per alios ponitur hic $\frac{g}{1-n}$ dividendus.

11. Quæ hic habentur, eruuntur ex num. 42 ejus paragraphi.

12. Hi valores habentur ibi num. 49.

13. Hæ æquationes omnes habentur ibi num. 50: reductio generalis ad valorem $H = 1$ num. 51.

14. Quæ hic habentur, sunt eadem maximâ ex parte, ac ibi num. 52: reliqua, quæ nimirum habentur hic versus finem, e præcedentibus facile eruuntur.

15. Hæ denominationes habentur ibi num. 57.

16. Æquationes, & reliqua, quæ hic habentur, sunt eadem omnia, ac ibi num. 58.

17. Hæ denominationes habentur num. 68; sed valor P est hic is, qui ibi erat Q, & ille P evasit inutilis post reductionem æquationis gradus tertii ad secundum factam in adnotatione ad num. 69.

18. Hæ æquationes habentur num. 69. præter primam, quæ habetur in eadem adnotatione.

19. Hoc compendium calculi pro valoribus quæsitis inveniendis facilius ope jam inventorum simile est adhibitis jam in præcedentibus casibus, & obtinetur comparando valores eosdem hic inventos cum ipsis inventis prius.

Uberior formularum reductio habebitur in supplemento I hujus Opusculi.

CA-

CAPUT IV.

Explicatio formularum capitis præcedentis, & applicatio ad numeros.

1. IN hoc capite explicabimus formulas finales collectas capite superiore, & eas illustrabimus exemplis numericis ita applicatis, ut quivis, qui satis calleat arithmeticam vulgarem cum fractionibus decimalibus, & habeat primam elementarem notitiam, & usum logarithmorum, possit applicare alios numeros iisdem formulis ita, ut habitis per observationes, & calculos institutos methodo primi Opusculi valoribus m, m', $\frac{dm}{dm'} = u$ pertinentibus ad bina vitra adhibenda, possit inde imitando hæc exempla deducere combinationes sphæricitatum pro ocularibus, & objectivis acromaticis. Eo pacto quidquid pertinet ad solum usum, habitis illis tribus valoribus, habebitur totum in hisce binis capitibus sine ullo recursu ad bina præcedentia, quæ pertinent ad inventionem, demonstrationem, reductionem formularum fundamentalium ad formas finales inde excerptas. Illa priora pertinent ad theoriam, hæc postrema ad praxim. Quin immo pro iis, qui satis norunt applicare numeros ad formulas algebraicas, sufficit solum caput III. Similia his occurrent in supplemento I hujus Opusculi, ubi habebuntur, ut innuimus in fine Opusculi II, formulæ ipsæ redactæ ad aliam formam a R. P. Gaudiberto cum exemplis numericis.

§. I.

De denominationibus paragraphi primi capitis III.

2. IN eo paragrapho continentur tantummodo denominationes generales pro omnibus formulis sequentibus pertinentibus ad lentes, nec indigent exemplis. Ibi fere omnia patent per sese. Valores

lores m, m' pertinent ad binas substantias adhibendas, primus quidem ad lentem, quæ prima radios excipit, & ad postremam, ubi sint tres, secundus autem ad lentem secundam. Ordinem enim tam lentium, quam superficierum numerabimus semper incipiendo ab objecto, & procedendo versus oculum, nimirum ita, ut in ipsas incidunt radii advenientes ab ipso objecto. In exemplis sequentibus fere semper ponemus primo loco lentem e substantia minus distrahente, ut e vitro communi convexam, secundo loco concavam e vitro magis distrahente: ubi autem habebuntur tres lentes, media erit e magis distrahente concava.

3. Valorem $\frac{dm}{dm'}$ dicimus u ad simpliciorem scriptionem, ut etiam c valorem $\frac{m-1}{m'-1}$, qui valores sæpe occurrunt. Reliqua omnia ita per se patent, ut nihil addendum esse videatur. Occurrent inferius aliæ denominationes pro nonnullis casibus particularibus.

§. II.

Explicatio formularum paragraphi II *cum exemplis*.

4. Hæ formulæ incipiunt a numero $\bar{9}$, (*) & pertinent ad oculares acromaticas. Proponuntur binæ species ocularium acromaticarum, quarum prima habet lentes componentes duas, secunda tres: in singulis autem speciebus habentur bini casus, adeoque habentur casus quatuor, quorum formulas evolvemus illustratas etiam exemplis applicatis ad eadem bina vitra. Verum ante præmittitur denominatio nova peculiaris, nimirum $\frac{1}{H}=u'=m-1-u(m'-1)$ nimirum ad simpliciorem expressionem formularum, & va-

(*) Hic numerus pertinet ad caput tertium: quoniam autem in hoc capite quarto citandi erunt sæpe tam numeri pertinentes ad hoc ipsum caput, quam ii, qui pertinent ad tertium; ne toties repetamus caput ipsum, ad quod ii pertinent, notabimus pertinentes ad tertium lineolâ superpositâ, ut hîc.

& valoris $\frac{1}{H}$, per quem dividi debent valores omnes fractionarii pertinentes ad radios sphæricitatis, & ad distantias focales, quæ respondent singulis lentibus, ut ea omnia reducantur ad mensuram, quæ assumitur pro distantia focali lentis compositæ. Nam ubi agetur de objectivis, reducentur demum omnes valores ad eam unitatem $= H$: sed hìc ipsas formulas, utpote simpliciores, reduximus immediate ad eam unitatem. Valores exhibiti a formulis fere omnes continebunt tantummodo fractiones decimales; expriment enim quantitates minores ipsâ distantiâ focali lentis compositæ.

5. Porro admodum facile invenietur numerus partium cujuscumque generis, quas continebunt valores ita inventi in decimalibus, ut linearum, vel pollicum, habito numero earum partium contento in valore H: satis erit per eum numerum multiplicare valores exhibitos a formulis. Si quis velit lentem compositam, cujus distantia focalis sit digitorum, vel linearum 45, multiplicabit omnes valores inventos in hypothesi $H = 1$, per 45, & habebit numerum pollicum, vel linearum cujusvis radii sphæricitatis superficiei cujusvis expressæ per fractionem, vel per numerum quemcumque erutum e formulis ita redactis. Ratio est manifesta; quia eæ erunt particulæ, in quas divisa concipitur illa unitas, quæ cum multiplicetur per illum earum numerum, ut reducatur ad eas mensuras minores, debent multiplicari per eundem valores reliqui omnes, qui fuerant relati ad ipsam.

6. Formulæ pro tabula sequenti habentur capite III numeris 13, & 14. Eæ corrigunt solum errorem diversæ refrangibilitatis juxta ea, quæ diximus num. 1, & 26 capitis secundi: in utroque autem casu lentis compositæ e binis lens prima est isoscelia. Patebit usus harum formularum ex ipsa tabula, & ejus explicatione. In ea valor m' est idem, ac numero 240 Opusculi I, valor m est fere idem, cum ibi sit 1,527, hìc 1,526: valor autem $u = \frac{dm}{dm'}$, hìc est nonnihil diversus, nimirum $= 0,6054$, qui ibi numero 241 erat $= 0,5929$, quod quidem nihil obest, ut mo-

monui ibi eodem numero 240, cum hìc agatur tantummodo de calculorum exemplis. Dum hoc secundum Opusculum conscriberem, adhibui numeros erutos ex aliis schedis pertinentes ad aliud vitrum commune, nec ubi, Opusculis inter se collatis, animadverti id exiguum discrimen, censui repetendos calculos omnes numericos, quos & pluribus vicibus ipse repetitos revocaveram ad trutinam, & ab aliis amicis repetendos curaveram, invento consensu. Spero ego quidem nihil erroris inventum iri in calculis, qui occurrent in hoc capite ab iis, qui forte ipsos iterum instituendos suscipiant, post tantam curam adhibitam in iis subducendis, & repetendis. Adhuc tamen siquid occurreret; id ipsum nihil obesset, ut monui, nimirum in exemplo. Soli formularum errores nocent: nam pro quovis vitrorum genere adhibendo novi calculi numerici institui debent applicandi ad easdem formulas. Id olim a Patre Horatio Burgundio, a quo prima accepi Matheseos elementa, sæpe audivi verissime dictum, nonnisi unicum esse hominum genus, quibus nunquam in calculis error irrepat, eorum nimirum, qui calculos nunquam instituant. Satis est hìc habere formulas exactas, & satis perspicuam methodum applicationis numerorum, quam facile sequatur is, qui curvaturas a novo vitrorum genere requisitas præbere debeat vitrorum artifici. Porro ut facilius methodum ipsam perspiciat, & hosce calculos numericos ad trutinam revocet, qui forte velit, vel alios similes instituat pro aliis vitris, debet, ubi agitur de singulis hisce tabulis, habere præ oculis exscriptas ex capite III eas formulas, quæ pertinent ad earum quamvis, ut & eandem tabulam itidem exscriptam, dum post ipsam habetur ejus explicatio distincta; ne dum legit, talem numerum talis lineæ erui ab alio talis alterius, debeat perpetuo abire ab una pagina ad aliam, labore nimis molesto, & pene intolerabili. Pro formanda hac tabula, & facile percipienda ejus explicatione, oportet habere præ oculis exscriptas formulas illorum numerorum 13, & 14 capitis III hujus Opusculi.

	Lentes 2	Lentes 3
$.m-1 = \ldots\ldots 0,526 \ldots \bar{0},27901$	$a = 0,320$	$a' = \ldots -0,529$
$m'-1 = \ldots\ldots 0,604 \ldots 9,78104$	$b = -0,320$	$b' = \ldots\ldots 0,529$
(*) $u = \ldots\ldots 0,6054 \ldots 9,78202$	$h = 0,304$	$h = \ldots\ldots 0,608$
$u(m'-1) = \ldots 0,366 \ldots 9,56306$	$h' = -0,438$	$h' = \ldots -0,438$
$u' = \ldots\ldots 0,160 \ldots 9,20412$	Casus I	$h'' = \ldots\ldots 0,608$
$u':(m-1) = 0,304 \ldots 9,48313$		Casus I
$u':u(m'-1) = 0,438 \ldots 9,64106$	$a' = -0,529$	$a = a'' = \ldots 0,640$
$2u' = \ldots\ldots 0,320 \ldots 9,50515$	$b' = 0,529$	$b = b'' = -0,640$
$.u = \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{0},21798$	Casus II	Casus II
$.(2u-1) = \ldots 0,211 \ldots \bar{0},67572$	$a' = -0,320$	$a = \ldots\ldots 0,810$
$.(1-u) = \ldots 0,395 \ldots \bar{0},40340$	$b' = 1,517$	$b = \ldots -0,529$
$2u':u = \ldots\ldots 0,529 \ldots 9,72313$		$a'' = \ldots\ldots 0,529$
$2u':(2u-1) = 1,517 \ldots 0,18087$		$b'' = \ldots -0,810$
$2u':(1-u) = 0,810 \ldots 9,90855$		

7. Prima columna continet omnes calculos numericos necessarios pro applicatione omnium formularum hujus paragraphi : quoniam autem radii sphæricitatum pro ocularibus exigui sunt, ut & distantiæ focales, ob distantiam focalem lentis compositæ, quæ semper est exigua in ocularibus; pro logarithmis assumuntur tantum quin-

(*) Hic valor u respondet logarithmo hic addito, licet ipsi non respondeat accurate nec hic logarithmus ipse, nec ille amplior $9,782023$, quo utemur in omnibus sequentibus calculis. Ubi ex angulis observatis quæritur valor $\frac{dm}{dm'}$ methodo adhibita in fine Opusculi I, invenitur immediate ejus valoris logarithmus, qui est accuratior, quam numerus inde erutus. Nunquam solet accidere, ut logarithmo invento respondeat numerus quidam accuratus : respondet ipsi numerus vero proximus, prodiens ex neglectu fractionnm inferiorum. Hinc adhibuimus hic logarithmum, qui obvenerat in iis calculis, ex quibus hoc exemplum est erutum, paullo etiam diversis ab iis, qui habentur in fine Opusculi I, cum numero ipsi proxime respondente, non logarithmum hujus ipsius numeri, qui tamen ab hoc hic adhibito ita parum differt, ut sine errore sensibili valorum finalium alter pro altero adhiberi possit. Id quidem nullius momenti est respectu eorum valorum, qui per hosce calculos determinantur : adhuc tamen id ipsum hic monendum censui, ne, si quis, quapiam ex hisce tabulis inspectà, videat, hunc logarithmum non respondere accurate huic numero, putet, hic errorem calculi irrepsisse, & idcirco omnibus diffidat. Sic in sequentibus tabulis accidet pluribus vicibus, ut logarithmus numero non accurate respondeat, nimirum quotiescumque numerus ipse fuerit deductus a logarithmo, non logarithmus a numero.

quinque notæ decimalium, & tres solæ pro radiis, & distantiis focalibus: possent esse satis etiam pro illis 4, pro his 2; sed una nota addita, ubi partes proportionales non sunt adhibendæ, laborem vix quidquam auget. Oportet tam hìc, quam in applicationibus sequentibus, habere formulas ipsas exscriptas in pagina separata, ut habeantur commodius ob oculos. Præstaret etiam habere impressam formam tabularum omnium in singulis foliis separatis, quæ contineant lineas, & litteras cum signis æqualitatis, & punctis ita, ut soli numeri suppleri debeant respondentes binis substantiis adhibendis. Eo pacto calculus numericus absolveretur brevi tempore.

8. Prima formula occurrit num. $\overline{12}$, & habet $u' = m - 1 - u(m' - 1)$. Pro ipsa habebitur hìc in prima linea $m - 1$, cujus numerus obtinetur dempta unitate a valore $m = 1,526$: ei additur complementum sui logarithmi futurum usui in sequentibus: secunda linea habet $m' - 1$ ex $m' = 1,604$ cum suo logarithmo, tertia logarithmum valoris u cum suo numero. Ea sunt fundamenta calculi eruenda methodo Opusculi primi. In quarta linea habetur summa logarithmorum secundæ, & tertiæ, cui respondet valor $u(m' - 1) = 0,366$: is subtractus a valore $m - 1 = 0,526$, qui habetur in prima linea, relinquit in linea quinta valorem quæsitum $u' = 0,160$. Huic additur suus logarithmus mox futurus usui.

9. Lineæ 6, & 7 destinatæ sunt pro valoribus lineæ I num. $\overline{13}$ ad habendos valores $h = \frac{u'}{m-1}$, & $h' = -\frac{u'}{u(m'-1)}$. Summa logarithmi lineæ 5, & complementi logarithmici lineæ 1 exhibet in lin. 6 logarithmum $u':(m-1)$, & ad habendum logarithmum valoris $\frac{u'}{u(m'-1)}$ subtrahitur in linea 7 logarithmus lineæ 4 a logarithmo lineæ 5: numeri respondentes iis logarithmis exhibent in iis lineis valores quæsitos 0,304, & 0,438.

10. Remanent determinandi valores $\frac{2u'}{u}$ pro linea II num. $\overline{13}$, $\frac{2u'}{2u-1}$ pro III ejusdem numeri, ac $\frac{2u'}{1-u}$ pro linea III num. $\overline{14}$.

Nam

Nam $2u'$, $4u'$ eruuntur primo aspectu ex u' invento in linea 5, ut & $\frac{2u'}{m-1}$ ex $\frac{u'}{m-1}$ invento in linea 6. Hinc ponitur in linea 8, $2u'$ cum suo logarithmo, in linea 9, 10, 11, u, $2u-1$, $1-u$ cum suis complementis logarithmicis: summa horum singulorum cum præcedente exhibet in sequentibus tribus lineis tres logarithmos, quorum numeri respondentes 0,529; 1,517; 0,810 sunt valores quæsiti. Semper adhibita est additio logarithmorum ope complementorum præter unicam subtractionem logarithmi $u(m'-1)$, qui jam habebatur, ad inveniendum $u':u(m'-1)$ juxta finem numeri præcedentis.

11. Determinatis in columna prima iis valoribus, jam facile eruuntur in secunda, & tertia omnes valores quæsiti pro lente oculari composita tam e binis, quam e tribus lentibus. Pro lente oculari composita e binis selegimus binas determinationes arbitrarias, quarum singulæ exhibent suum systema. In utroque systemate lens prima est isoscelia utrinque convexa ex vitro communi: tum in primo casu secunda itidem isoscelia utrinque concava e flint, in secundo prima superficies concava ejusdem sphæricitatis cum convexa priore ita, ut binæ illæ superficies internæ sibi invicem congruant. Quatuor valores pertinentes ad binos radios sphæricitatis, a, b, a', b', & ad binas distantias focales binarum lentium seorsum sumptarum h, h' sunt communes utrique casui, determinatio autem radiorum sphæricitatis secundæ lentis est diversa pro iis binis casibus.

12. Valor a, vel a' positivus, & b, vel b' negativus ambo indicant convexitatem, quod est generale omnibus lentibus. Valor radii primæ superficiei positivus indicat convexitatem, infinitus superficiem planam, negativus concavitatem: vice versa valor positivus radii sphæricitatis superficiei secundæ lentis cujusvis indicat concavitatem, infinitus superficiem planam, negativus convexitatem. Valor h, vel h' positivus indicat focum realem radiorum convergentium, negativus virtualem divergentium, infinitus parallelismum ipsorum. In hoc exemplo nullus valor est infinitus.

13. Persequemur jam singulos e valoribus columnæ 2, & 3, ordi-

ordine suo, & indicabimus loca columnæ 1, ex quibus excerpuntur. Valor communis pro a, & $-b = 2u' = 0,320$ habetur in linea 8 columnæ 1 : valor $h = u':(m-1) = 0,304$ habetur ibidem in linea 6, & $h' = -u':u(m'-1) = -0,438$ in linea 7. Tum pro casu I valor pro a', & $-b' = 2u':u = 0,529$ in linea antepenultima, qui ambo indicant concavitatem, & pro casu II a', qui debet esse $= b = -0,320$ habetur jam in linea secunda secundæ columnæ, & $b' = 2u':(2u-1) = 1,517$ habetur in linea penultima columnæ primæ.

14 Pro tribus lentibus habentur itidem bini casus, in quorum priore omnes tres lentes sunt isosceliæ, & extremæ e vitro communi, utrinque convexæ, & æquales, in altero media e flint utrinque concava, & isoscelia, extremæ convexæ æquales, sed positæ ordine inverso ita, ut superficies internæ congruant utrinque a lente concava. Valores a', b', h, h', h'' in columna tertia sunt communes utrique casui, & a', b', h' iidem, qui in columna 2 in linea 5, 6, 4: valores h, h'' dupli ejus h, qui habetur in linea 3 columnæ 2. Valores $a = a''$, $b = b''$ in casu I sunt dupli eorum, qui habentur in linea 1, & 2 columnæ 2 : in casu II valor pro a, & $-b'' = 2u':(1-u) = 0,810$ habetur in linea ultima columnæ 1, & $b = -0,529$, $a'' = 0,529$ sunt iidem, ac in linea 1, & 2 ejusdem columnæ 3.

15. Calculus pro hisce systematis est satis expeditus : sed posset reddi multo simplicior, & generalis, ubi agitur de vitris communibus, & iis flint, quæ afferri solent ex Anglia, pro valoribus radiorum sphæricitatis, si minus accuratis, saltem vero valori proximis. Eorum ratio mutua pendet a solo valore u : nam ipsorum valores sunt in columna prima in linea 8, & tribus postremis $2u'$, $2u':u$, $2u':(2u-1)$, $2u':(1-u)$, qui divisi per $2u'$ remanent ut 1, $1:u$, $1:(2u-1)$, $1:(1-u)$: valor autem u communiter in ejusmodi vitris solet esse proxime $\frac{2}{3}$. In ipsis valoribus numeri 244 Opusculi I, valores dm sunt proximi valori 0,018, & valores dm' dempto postremo, qui pertinet ad quoddam genus vitri flint, quod accedit ad vitrum strass, sunt satis vicini valori 0,027 : adeoque $u = dm:dm'$ est proxime $= \frac{2}{3}$.

Va-

Valores h, & h' pendent etiam a valoribus $m-1$, $m'-1$, a quibus pendet valor u': verum etiam ipsi sunt parum abludentes a valore $\frac{1}{2}$, cum m, & m' parum abludant ab $1.\frac{1}{2}$.

16. Si retineantur hi valores; habetur $u(m-1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, adeoque $u'=m-1-u(m'-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Hinc $u':m-1=\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, $u':u(m'-1)=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$: tum $2u':u=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$, $2u':(2u-1)=\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=1$, $2u':(1-u)=\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=1$. Ex hisce valoribus pro binis lentibus evadit $a=-b=2u'=\frac{1}{3}$, $h=u':(m-1)=\frac{1}{3}$, $h'=-u':u(m'-1)=-\frac{1}{2}$, & pro casu I $a'=-b'=-2u':u=-\frac{1}{2}$, pro secundo $a'=b=-\frac{1}{3}$, $b''=2u':(2u-1)=1$. Pro tribus lentibus habetur $a=-b=\frac{1}{3}$, ut pro binis lentibus, & $h'=-\frac{1}{2}$, ut ibidem: at $h=h''=\frac{2}{3}$, valor duplus valoris b binarum lentium. Tum pro casu I $a=-b=a''=-b''=\frac{2}{3}$ valor duplus valoris $a=-b$ binarum lentium: & pro casu II $a=-b''=2u':(1-u)=1$, $b=-a''=\frac{1}{2}$, ut $a'=-b'=-\frac{1}{2}$.

17. En igitur combinationes simplices. Pro binis lentibus: fiat prima e vitro communi isoscelia convexa, habens pro radio $\frac{2}{3}$ ejus distantiæ focalis, quam debet habere lens composita, secunda vero e flint utrinque concava, & vel itidem isoscelia habens pro radio dimidium distantiæ focalis, vel habens superficiem internam ejusdem radii, quem habet convexa $=\frac{2}{3}$ distantiæ focalis quæsitæ, & externam cum radio æquali ipsi distantiæ focali. Pro tribus lentibus fiat media utrinque concava e flint cum radio dimidio distantiæ focalis, quam debet habere lens composita: tum binæ extremæ convexæ e vitro communi, & vel isosceliæ cum radio æquali $\frac{2}{3}$ ejusdem distantiæ focalis, vel cum superficiebus externis habentibus radium æqualem ipsi distantiæ focali, & internis habentibus radium æqualem dimidio ipsius. Distantia focalis lentis concavæ erit in omnibus hisce systematis dimidia distantiæ focalis lentis compositæ, & distantia focalis lentis convexæ unicæ in primo casu erit $\frac{1}{3}$ ejusdem, in secundo, in quo eæ sunt binæ, erit pro singulis $\frac{2}{3}$.

18. Revera distantiæ focales singularum lentium obvenient paulo breviores ob valores $m-1$, & $m'-1$ fere semper majores $\frac{1}{2}$,

& di-

& distantia focalis totius lentis compositæ major, & sæpe multo major idcirco, quod $m' - 1$ solet inveniri semper major, quam $m - 1$. Sed si serventur eædem illæ mensuræ radiorum respectu magnitudinis cujusvis arbitrariæ; colores evadent ita exigui, ut oculo transpicienti per ejusmodi lentem non sint sensibiles.

19. Si pro flint combinato cum vitro communi adhibeatur vitrum strass, quod solet habere vim distractivam majorem ita, ut comparatum cum communi exhibeat $u = \frac{1}{2}$; tum simili calculo inveniuntur combinationes adhuc simpliciores. Pro binis lentibus prima e vitro communi erit isoscelia convexa cum radio dimidio distantiæ focalis communis, secunda e strass concava, & vel isoscelia cum radio æquali distantiæ focali ipsi, vel habens radium superficiei internæ æqualem itidem dimidiæ ei distantiæ, & superficiem externam planam. Pro ternis omnes radii tam quatuor superficierum convexarum, quam binarum concavarum erunt æquales toti distantiæ focali communi. Distantia vero focalis virtualis concavæ, quæ in omnibus combinationibus est sola, erit æqualis distantiæ focali reali totius lentis compositæ, & distantia focalis realis singularum convexarum in combinatione trium lentium itidem æqualis ipsi toti, in combinatione binarum dimidia ipsius. Verum & hîc distantiæ focales singularum obvenient paullo breviores inventis, distantia totalis longior propositâ.

20. In hisce combinationibus poterit inverti vel totum systema, vel una e lentibus, vel omnes simul, vel ubi sunt tres, poni quævis in medio; effectus, quod pertinet ad supprimendos colores, erit semper idem. In sequentibus applicationibus, in quibus corrigitur tam error diversæ refrangibilitatis, quam error figuræ sphæricæ, ad habendum hunc secundum effectum, servandus erit ordo & lentium, & superficierum idem, quem calculus exhibebit. Possent etiam pro ocularibus haberi formulæ, quæ corrigerent errorem figuræ sphæricæ, sed eædem evaderent multo complicatiores, quam eæ, quæ proponuntur pro objectivis, & aliæ pro aliis positionibus ocularium ipsarum ad se invicem, & respectu objectivi.

21. Illud hîc addemus, formulas, & mensuras numericas, quæ

proposuimus pro lente composita, quæ habeat focum realem, posse inservire etiam pro lente, quæ debeat habere focum virtualem, quæ nimirum radios reddat non convergentes, sed divergentes. Satis est ad eam rem, mutare omnes convexitates in cavitates, & vice versa: nam mutata unitate, ad quam omnes valores relati sunt, nimirum distantia focali communi, e positiva in negativam, mutant signum valores iidem omnes. Quamobrem si fiat lens composita ex iis binis vitris, pro quibus hosce calculos instituimus, & prima e vitro communi sit concava, secunda e flint convexa, sint autem radii utriusque concavitatis primæ $a = -b = 0,320$, convexitatis utriusque secundæ $a' = -b' = 0,529$; obveniet lens æquivalens lenti concavæ, nimirum habens focum virtualem cum distantia focali $= 1$, & distantia focalis virtualis concavæ solius erit $= -0,304$ solius convexæ $0,438$; quæ mutatio fieri poterit in reliquis omnibus combinationibus.

22. Ejusmodi lentes compositæ habere possunt usum optimum in telescopiolis illis brevibus, quæ una manu adhibentur, & interdiu pro objectis parum remotis, & per noctem in theatris. Poterit in iis adhiberi ocularis composita, quæ habeat focum multo breviorem, & totum campum, quem permittit apertura pupillæ; quin appareant ii colores, qui in ejusmodi telescopiolis occurrunt semper, si augmentum, & campus sint paullo majores, & proveniunt ab oculari: quamobrem communiter solent minuere utrumque ex iis binis ad tollendos colores sensibiles, cum maximo detrimento effectus, qui in ejusmodi instrumentis haberi posset multo major per solam hanc substitutionem lentis concavæ acromaticæ fortioris. Quin immo disparebunt colores fere penitus; si adhibendo vitra communia, & ea vitra flint, quæ solent adhiberi, supponatur in iis $u = \frac{2}{3}$ juxta numerum 15, ac fiat lens altera concava e vitro communi, altera convexa e flint, ambæ isosceliæ, existente radio convexitatis ad radium concavitatis ut 3 ad 2. Obveniet lens acromatica composita, cujus distantia focalis virtualis erit aliquanto major, quam dupla distantia focalis realis pertinens ad ejus convexam.

23. In-

23. Innuemus demum, in omnibus etiam sequentibus applicationibus, & in aliis, quæ possint deduci e formulis generalibus, in quibus lens e flint sit unica, & corrigatur distractio per conjunctionem, vel cum unica lente e vitro communi, vel cum pluribus, rationem valoris h' ad H fore semper eandem, quæ nimirum pendet tantummodo a valore u exprimente rationem virium distractivarum. Hinc in omnibus sequentibus combinationibus, ubi demum fiet reductio valorum ad unitatem $=$ H, invenietur valor h' vel accurate æqualis valori 0,438, quem invenimus hic num. *6*, vel cum exiguo discrimine orto a neglectu fractionum inferiorum.

§. III.

Explicatio formularum paragraphi III *cum exemplis*.

24. In hoc paragrapho habentur formulæ pro objectivo acromatico composito ex binis lentibus destruentibus, quantum licet, errorem tam diversæ refrangibilitatis, quam figuræ sphæricæ. Numero $\overline{15}$ proponuntur *6* capita, ad quæ pertinent hæ formulæ. In primo habentur novæ denominationes: in 2 æquatio generalis, quæ continet binos valores a, & a' quæsitos, qui sunt radii sphæricitatum superficiei primæ utriusque lentis, & alias tres pro valoribus distantiarum focalium h, h', H, quæ itidem sunt generales omnibus systematis objectivorum constantium binis lentibus. Prior illa pro a, & a' remanet indeterminata, & admittit solutiones numero infinitas, pro quarum singulis requiruntur singulæ determinationes arbitrariæ. Subsequuntur quatuor ejusmodi determinationes: in prima assumitur lens prima isoscelia: in secunda superficies internæ congruentes: in tertia lens prima data, nimirum cum radiis utriusque sphæricitatis datis in quovis genere partium scalæ cujusvis: in quarta lens secunda data. Persequemur singula ejusmodi capita cum exemplis: sed in primo denominationum addemus valores nonnullos, qui erunt usui in classe sequenti.

25. Hæ denominationes habentur numero $\overline{16}$: opus est longio-

 re cal-

re calculo numerico ad inveniendos valores subsidiarios pertinentes ad ipsas denominationes. Hi novi valores constant e pluribus factoribus continentibus valores m, m', u ita dispositos cum 1, 2, 3, 4, vel additis, aut demptis, vel efformantibus coefficientes, aut exponentes; ut primo intuitu facile efformentur, & sine ullo usu partium proportionalium excerpantur e tabulis eorum logarithmi cum notis 6 post characteristicam, quæ ad usum præsentem abunde sunt. Pro primis tribus terminis habetur communis coefficiens c, cujus valor inter denominationes generales (num. $\bar{2}$) est $\frac{m-1}{m'-1}$, quamobrem invenitur primo loco ejus logarithmus pro iis terminis: tum inveniuntur termini singuli, qui sunt 9 ejus formæ: iis accedunt alii duo continentes summas, & differentias aliquorum ex ipsis. Tota hæc operatio patebit exemplo, quod proponemus, pro quo habendæ sunt ob oculos ipsæ denominationes numeri 16 (*).

26. Ad ordinandum omnem hunc calculum adhibebimus quatuor columnas. Prima continebit coefficientes datos per m, m', & u: secunda ipsorum logarithmos erutos e tabulis: tertia valorem c, & quinque ex iis 9 valoribus, eruendos ope summæ logarithmorum pertinentium ad coefficientes singulorum: quarta reliquos 4, quæ continebit 3 lineas ultra numerum linearum præcedentium. Hinc infra priores tres columnas habebitur locus pro inveniendis postremis binis valoribus per alias 4 columellas breves. Ubi occurret coefficiens, qui sit divisor, præponemus ipsi unum punctum, & characteristicæ ejus logarithmi superponemus lineolam, ut in superioribus exemplis: ubi autem occurrent exponentes, ibi facilioris impressionis causa ponemus ipsos cum puncto ante quantitatem, cujus potentiam indicant: sic $3.m$ exprimet m^3, & $2.m-1$ exprimet $(m-1)^2$.

$m = 1$

(*) Præstabit, ut & alibi monuimus, hanc tabulam descriptam habere præ manibus, dum ejus usus explicatur, ut & formulas, & tabulas, ubi agitur de iis applicandis, vel explicandis, ne paginæ perpetuo invertendæ attentionem imminuant.

$m = 1,526$	0,183554	$m - 1$ . . . 9,720986	u 9,782023
$m' = 1,604$	0,205204	$.m' - 1$ . . . $\bar{0}$,218963	$m' + 2$ 0,556785
(*) $u = 0,6054$	9,782023	c 9,939949	$.m'$ . . . . $\bar{9}$,794796
$m - 1 = 0,526$	9,720986	$2.m$ 0,367109	C' = 1,360 . . 0,133604
$m' - 1 = 0,604$	9,781037	A = 2,028 . . 0,307058	$2.u$ 9,564046
$m + 1 = 2,526$	0,402433	$2m + 1$ 0,607669	$3m' + 1$ 0,764326
$m' + 1 = 2,604$	0,415611	B = 3,529 . . 0,547618	$m - 1$ 9,720986
$m + 2 = 3,526$	0,547282	$m + 2$ 0,547282	D' = 1,120 . . 0,049358
$m' + 2 = 3,604$	0,556785	$.m$ . . . . $\bar{9}$,816416	4 0,602060
$2m + 1 = 4,052$	0,607669	C = 2.012 . . 0,303677	u 9,782023
$2m' + 1 = 4,208$	0,624076	$3.u$ 9,346069	$m' + 1$ 0,415641
$3m + 1 = 5,578$	0,746478	$2.m'$ 0,410408	$m - 1$ 9,720986
$3m' + 1 = 5,812$	0,764326	A' = 0,5708 . . 9,756477	$.m'$ . . . . $\bar{9}$,794796
$3m + 2 = 6,578$	0,818094	$2.u$ 9,564046	E' = 2,068 . . 0,315506
$3m' + 2 = 6,812$	0,833275	$2m' + 1$ 0,624076	u 9,782023
4	0,602060	B' = 1,542 . . 0,188122	$3m' + 2$ 0,833275
			$2.m - 1$ 9,441972
			$.m'$ . . . . $\bar{9}$,794796
			F' = 0,7113 . . 9,852066

B' = 1,542	A = 2,028	− A' = − 0,5708	3,148
− E' = − 2,068	D' = 1,120	− F' = − 0,7113	− 1,2821
G = − 0,526	3,148	− 1,2821	I = 1,8659

27. Valores m , m' , u columnæ primæ sunt ii , qui propositi sunt hìc num. 6 , & adhibiti huc usque : satis patet , quo pacto ex prioribus binis formentur reliqui omnes usque ad postremum 4. Pro prioribus sex satis est demere 1 a valoribus m , m' , vel iis addere 1 , vel 2 : pro sequentibus primo intuitu obtinentur valores $2m$, $2m'$, $3m$, $3m'$, incipiendo multiplicationem per 2 , vel 3 a postrema nota : ac primæ notæ additur 1 , vel 2 . Pro secunda columna eruuntur logarithmi e tabulis communibus , cum notæ numerorum non abeant ultra quartam . Solus logarithmus u adhibetur hìc idem , qui habetur num. 6 , non is , qui in tabulis respondet numero hìc ipsi præfixo , juxta adnotationes appositas hìc , & ibi .

28. In tertia columna habentur 6 partes pro eruendis logarithmis

(*) Habendum præ oculis , quod monuimus in adn. num. 6 , hunc numerum erutum fuisse e suo logarithmo , non logarithmum e numero : logarithmus hujus numeri esset 9,782042 : numerus respondens logarithmo 9,782093 haberet adhuc 0,000027 , &c. quæ contemnuntur .

mis sequentium valorum, & numeris, qui respondent postremis quinque: nullus enim occurret usus numeri valoris c: sunt autem $c = \frac{m-1}{m'-1}$, $A = cm^2$, $B = c(2m+1)$, $C = \frac{c(m+2)}{m}$, $A' = u'm'^2$, $B' = u'(2m'+1)$. Prima pars habet $m-1$ cum suo logarithmo eruto ex linea 4 columnæ 2, tum $.m'-1$ cum complemento ejus logarithmi positi in linea 5 ejusdem. Summa eorum exhibet logarithmum valoris c, qui valor cum sit factor sequentium trium valorum A, B, C; ejus logarithmus hic inventus adhibendus est in sequentibus tribus partibus. In secunda habetur $2.m$, pro m^2, cum suo logarithmo eruto ex prima linea columnæ 2, duplicando logarithmum m, qui habetur ibi. Summa hujus logarithmi, & logarithmi c lineæ tertiæ, exhibet logarithmum valoris A.

29. Eodem pacto pro sequentibus omnibus quæruntur factores in prima columna: eruuntur eorum logarithmi e secunda assumendo in linea 9 hujus columnæ pro logarithmo $.m$, sive $\frac{1}{m}$ complementum logarithmi m, qui habetur in linea 1 columnæ 2, & pro logarithmo $3.u$, sive u^3, triplum logarithmi u, qui habetur in ejus columnæ linea 3, ac pro $2.u$, sive u^2 duplicando ipsum. In parte 3 pro B fit summa logarithmorum c lineæ 3, & $2m+1$ lineæ 6: in parte 4 pro C fit summa trium, nimirum c lineæ 3, $m+2$ lineæ 8, $.m$ lineæ 9. At in parte 5, & 6 pro valoribus A', & B' fit tantummodo summa binorum logarithmorum, qui habentur in ipsis.

30. Columna 4 eodem modo exhibet valores logarithmicos pro eruendis numeris valorum $C' = \frac{u(m'+2)}{m}$, $D' = u^2(3m'+1)(m-1)$, $E' = \frac{4u(m'+1)(m-1)}{m'}$, $F' = \frac{u(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$.

31. Factis omnibus summis, quæ exhibent logarithmos novem valorum A, B, C, A', B', C', D', E', F', quærendi sunt in tabulis numeri, qui respondent iis logarithmis inventis, & adscribendi suis litteris. Primi tres valores A, B, C requiruntur pro

prima

prima lente, postremi sex pro secunda. Si quæreretur correctio erroris figuræ sphæricæ pro radiis divergentibus a puncto parum remoto, vel convergentibus ad punctum parum remotum; occurrerent etiam valores D, E, F determinandi pro prima lente: sed consideratio radiorum divergentium a puncto admodum remoto, tanquam si essent paralleli, efficit, ut ii valores habeantur pro $=0$. Si corrigendus esset error figuræ sphæricæ pro ocularibus; occurrerent ii etiam valores, qui pro diversa singularum collocatione essent diversi: eam ob causam in §. 21 pro ocularibus, omissâ correctione figuræ sphæricæ, adhibitæ sunt formulæ multo simpliciores tendentes ad destruendum solum errorem diversæ refrangibilitatis.

32. Inventis hisce novem valoribus, remanent inveniendi $G = B' - E'$, & $I = A + D' - A' - F'$, qui sunt postremi numero $\overline{16}$. Iis destinatæ sunt illæ quatuor exiguæ columnæ, quæ habentur infra priores tres, & complent longitudinem tabulæ parem longitudini columnæ quartæ. In prima ex hisce quatuor habetur valor B', tum $-E'$, & infra ipsas residuum, quod est valor G: in secunda A, & D' cum eorum summa positiva: in tertia $-A'$, $-F'$ cum eorum summa negativa: in quarta repetuntur hæ binæ summæ, & earum differentia exhibet ibidem valorem I. Littera I succedit hic litteræ G, quia H adhibita jam est, & adhibebitur infra pro distantia focali totius lentis compositæ.

33. Hæc pertinent ad primum caput e propositis num. 24, nimirum ad novas denominationes, quæ sunt adhibitæ ad evitandam in sequentibus repetitionem longorum coefficientium. Progrediendum jam ad secundum caput æquationum generalium pro quovis systemate objectivi compositi e binis lentibus. Hæ æquationes habentur num. $\overline{17}$: sunt autem I hæ tres $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -u(m'-1)$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$, tum II $\frac{C}{a^2} - \frac{B}{a} - \frac{C'}{a'^2} - \frac{G}{a'} + I = 0$. Hæc secunda ope valorum tabulæ numeri 26 evadit

$$\frac{2,012}{a^2} - \frac{3,529}{a} - \frac{1,360}{a'^2} + \frac{0,526}{a'} + 1,8659 = 0.$$

34. Pro

34. Pro illis prioribus habebitur hìc tabella adnexa huic numero, in qua simul reducentur valores h, h' ad unitatem $=$ H. Linea prima continet valorem $1 : h = m - 1 = 0,526$ excerptum e linea 4 columnæ 1 tabulæ præcedentis: sequentes duæ n, & $m' - 1$ cum suis logarithmis excerptis ex linea 3, & 5 ejusdem columnæ: quarta summam eorum logarithmorum, cum suo numero $0,3657$, qui est valor $1:h'$: in quinta habetur summa numerorum lineæ 1, & 4, qui est valor $1:$H. Is debet dividi per illos priores $1:h$, & $1:h'$ ad habendos h, & h' respondentes novæ unitati $=$ H. Idcirco in lin. 6 habetur complementum logarithmicum valoris $m - 1$, quod deducitur ex linea 4 columnæ 2 tabulæ præcedentis continente ejus logarithmum, ac est $\bar{0},279014$: in lin. 7 habetur complementum logarithmi $1 : h'$ inventi hìc in linea 4. Linea 8 continet summam logarithmorum lineæ 5, & 6: linea 9 summam lineæ 5, & 7: horum numeri eruti e tabulis sunt bini valores quæsiti, quibus adjicitur valor H $= 1$. Valor $1 :$ H, qui habebatur in linea $5 = 0,1603$ exhiberet pro H longe alium numerum: sed is responderet alteri unitati, cui itidem responderent longe alii numeri pro h, & h', qui obvenirent divisâ unitate per $0,526$, & $0,3657$. Pro reductione valorum h, h' ad unitatem $=$ H debent vel eorum valores inventi in illis aliis unitatibus dividi per valorem H, inventum in iisdem, vel valor $1:$H habitus in iis per $1:h$, $1:h'$ habitos in iisdem. Cum habeantur jam logarithmi harum fractionum, inutilis est inventio ipsorum H, h, h' in illis unitatibus: perficitur res facilius immediate methodo hìc adhibita per complementa logarithmica fractionum earundem.

$1 : h =$	$0,526$	
n		$9,782023$
$m' - 1$		$9,781037$
$1 : h' =$	$-\ 0,3657$	$9,563060$
$1 :$ H $=$	$0,1603$	$9,204933$
$.1 : h$		$\bar{0},279014$
$.1 : h'$		$\bar{0},436940$
$h =$	$0,3048$	$9,483947$
$h' =$	$-\ 0,4384$	$9,641873$
H $= 1$		

35. Va-

35. Valor h' debebat obvenire hic per num. 23 idem, ac in columna 2, & 3 numeri 6: & quidem si sistatur in millesimis, est idem utrobique. Discrimen, quod occurrit in logarithmo invento ab invento ibi, oritur ex neglectu fractionum inferiorum in utroque calculo, quod discrimen cum sit tam exiguum, confirmat potius & formulas, & eundem neglectum, sine quo calculus evaderet multo molestior, & nonnisi paullo admodum accuratior.

CASUS I.

36. Progrediendum ad quatuor casus determinationum arbitrariarum proponendo exempla pro prioribus tribus, nam quartus tertio est admodum similis. Casus I est lentis primæ isosceliæ, cujus æquationes numero $\overline{18}$ deductæ sunt ex generali numeri $\overline{17}$ cum suppositione $a = -b$, & relatione b ad a': sunt autem $\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'} - I - \frac{1}{4}C + \frac{1}{2}B = 0, \frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}, \frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + n$. Inveniendus est valor $\frac{1}{a'}$ ope æquationis primæ, quæ est gradus secundi, tum ex ipso $\frac{1}{b'}$; ac ut habeantur valores a, b, a', b' redacti ad unitatem $=$ H dividendus est valor $\frac{1}{H} = 0,1603$ lineæ 5 tabellæ ~~numeri præcedentis~~ per $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ datos, & $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ inventos. Divisio valoris H per $\frac{1}{2}$ duplicat ipsum ejus valorem, & remanent $a = 0,3206$, $b = -0,3206$: divisio per $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ fit commode ope logarithmi valoris $\frac{1}{H}$, qui est in eadem linea 5 ejus tabellæ, & complementi logarithmici valorum $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ eodem modo, quo in eadem tabella inventi sunt valores h, h'.

37. Totus hic calculus habetur in tabella sequenti, in qua habetur etiam ipsa resolutio æquationis gradus secundi ope logarithmorum. Invento valore $-I - \frac{1}{4}C + \frac{1}{2}B$, reducitur æquatio ad formam $px^2 + qx + r = 0$, in qua $x = \frac{1}{a'}$. Divisis juxta num. 82

q, & r per p, & factis $q' = \frac{q}{p}$, $r' = \frac{r}{p}$, habetur forma $x^2 + q'x + r' = 0$, unde eruitur x, sive $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}q' \pm \surd(\frac{1}{4}q'^2 - r')$. Cum habeatur logarithmus valoris q', ejus duplum exhibet logarithmum q'^2, cujus pars quarta cum $-r'$ est summa valoris inclusi signo radicali: huic valori adscribitur logarithmus, cujus dimidium exhibet radicem quæsitam: ea addita valori $\frac{1}{2}q'$, vel inde ablata, exhibet valorem $\frac{1}{a'}$. Duplex valor ex duplici signo radicis quadratæ exhiberet duo systemata: sed seligendus est is valor, qui reddat valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ minores, ut valores a', b' evadant majores, neglecto illo, ex quo alter ex prioribus $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ debeat obvenire nimis magnus, licet alter obveniat perquam exiguus, ne nimirum obveniat nimis exiguus utervis e binis radiis sphæricitatum a', b'. Res patebit exemplo ipsius novæ tabellæ.

$-\mathrm{I} = -1,8659$	p (*) . . . . $\bar{9},866396$	$1:\mathrm{H}$ . . . . $9,204933$
$-\frac{1}{4}\mathrm{C} = -0,5030$	$q = -0,526$ . . $9,720986$	$1:a'$ . . . . $\bar{0},300336$
$-2,3689$	$r = -0,6044$ . . $9,781324$	$1:b'$ . . . . $\bar{0},980468$
$\frac{1}{2}\mathrm{B} = 1,7645$	$q' = -0,3867$ . . $9,587382$	$a' = -0,3201$ . . $9,505269$
$-0,6044$	$r' = -0,4444$ . . $9,647720$	$b' = 1,533$ . . $0,185401$
$\frac{1,360}{a'^2} - \frac{0,526}{a'} - 0,6044 = 0$	$q'^2 = 0,1495$ . . $9,174764$	$a = 0,3206$
$\frac{1}{a'^2} - \frac{0,3867}{a'} - 0,4444 = 0$	$\frac{1}{4}q'^2 = 0,0374$	$b = -0,3206$
$\frac{1}{a'} = 0,1933 \pm 0,6941.$	$0,4818$ . . $9,682867$	$h = 0,3048$
	$\pm 0,6941$ . . $9,841433$	$h' = -0,4384$
	$-\frac{1}{2}q' = 0,1933$	$\mathrm{H} = 1$
	$1:a' = -0,5008$	
	$u = 0,6054$	
	$1:b' = 0,1046$	

(*) Numerus p debet hic esse idem, qui in linea 5 columnæ 1 est coefficiens primi termini, & ibi positus est 1,360: est autem idem, qui in linea 4 columnæ 4 tabulæ numeri 26 est valor C': debuit ipsi adnecti complementum ejus logarithmi; sed quoniam is numerus erutus est ibi ex eo logarithmo, ut proximus illi, qui ipsi respondet, logarithmus autem ipse est ibi 0,133604; idcirco positum est hic hujus complementum 9,866396, non complementum logarithmi respondentis accurate numero 1,360.

38. Ta-

38. Tabella continet columnas tres. Prima linea columnæ 1 habet valorem -1, qui est postremus terminus æquationis generalis numeri 33 assumptus cum signo contrario, secunda $-\frac{1}{4}C$, nimirum quadrantem coefficientis 2,012 primi termini ejusdem æquationis, tertia horum summam, quarta $\frac{1}{2}B = 1,7645$, nimirum dimidium coefficientis 3,529 secundi termini ejusdem æquationis, quinta differentiam numerorum tertiæ, & quartæ, quorum alter erat negativus, alter positivus. Is est valor $-1-\frac{1}{4}C + \frac{1}{2}B$ postremi termini novæ æquationis, quæ æquatio habetur in linea 6 ejusdem columnæ: terminus primus, & secundus hujus æquationis particularis sunt illi iidem, qui in æquatione generali eadem numeri 33 fuerant tertius, & quartus, sed cum signis mutatis ad hoc, ut primus terminus remaneat positivus.

39. Linea 7 ejusdem columnæ 1 continet æquationem lineæ 6 liberam a coefficiente primi termini, & linea 8 valorem duplicem incognitæ quæsitæ $\frac{1}{a}$. Calculus pro ea liberatione, & resolutione æquationis liberatæ habetur in columna 2. Coefficientes primæ æquationis sunt valores p, q, r numeri 37, quorum duo postremi sunt dividendi per primum ad habendos valores q', r'. Hinc in prima linea columnæ secundæ habetur complementum logarithmi valoris p, acceptum juxta id, quod habetur in adnotatione ad num. 37 sui logarithmi, in secunda, & tertia q, & r cum suis logarithmis: horum singulorum summa cum illo complemento exhibet in linea 4, & 5 logarithmos valorum q', & r', quorum valores $-0,3867$, & $-0,4444$ sunt coefficiens secundi termini, ac postremus terminus æquationis liberatæ positæ in linea 7 columnæ 1.

40. Duplicando logarithmum q' lineæ 4, habetur in linea 6 logarithmus q'^2, cujus numeri 0,1495 pars quarta 0,0374 est in linea 7 valor $\frac{1}{4}q'^2$. Ipsius, & valoris $-r'$ excerpti e linea 5 cum signo contrario, qui cum jam adsit ipsi tam proximus, non est repetendus, fit summa in linea 8, cum uterque sit positivus: ea ibi obvenit 0,4818, quæ, cum sit positiva, admittit duplicem radicem realem, alteram positivam, alteram negativam. Si ea sum-

ma obvenisset negativa; radices essent imaginariæ. Ad extrahendam radicem adscribitur in ipsa linea 8 ei summæ suus logarithmus: in linea 9 ponitur ejus logarithmi dimidium assumptum, post adjectam characteristicæ unam decadem, tanquam si haberetur 19,682867: ejus dimidii numerus $\pm$ 0,6941 exhibet valorem $\pm \sqrt{(\frac{1}{4}q'^2 - r')}$. Is valor est postremus terminus lineæ 8 columnæ 1, cujus lineæ secundus est $-\frac{1}{2}q'$ dimidium numeri q' positi in linea 4 columnæ 2 cum signo contrario. Linea 10 habet ipsum valorem $\frac{1}{2}q'$, & linea 11 differentiam præcedentium binorum, assumptâ nimirum radice negativâ, quæ differentia $-$ 0,5008 est unus e binis valoribus $\frac{1}{a'}$. Posset haberi alter assumendo radicem 0,6941 positivam, quo pacto haberetur $\frac{1}{a'} = 0,8874$ valor positivus, & multo major altero $-$ 0,5008. Is rejicitur, quia exhiberet primam superficiem secundæ lentis convexam, & valorem radii a' multo minorem; adeoque juxta numerum 37 omittendus est præferendo minorem e binis valoribus $\frac{1}{a'}$, qui exhibet a' majorem cum curvatura minore.

41. Cum $\frac{1}{b'}$ sit $= \frac{1}{a'} + u$; ponitur in linea 12 valor u erutus ex linea 3 columnæ 1 tabulæ numeri 26, cujus positivi differentia a valore $\frac{1}{a'}$ negativo lineæ præcedentis exhibet in linea ultima ejus columnæ valorem $-\frac{1}{b'}$.

42. Dividendus jam est (num. 36) valor $\frac{1}{H}$ per valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ ad habendos a', & b' respondentes valori H $=$ 1, & ipse valor $\frac{1}{H}$ duplicandus ad habendos valores a, & b. Is calculus habetur in columna 3. Prima linea habet $\frac{1}{H}$ cum suo logarithmo eruto ex linea 5 tabellæ numeri 34: secunda, & tertia habent complementa logarithmica valorum $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ inventorum in columna 2.

Ho-

Horum singulorum summæ cum logarithmo lineæ 1 exhibent in linea 4, & 5 logarithmos valorum a', & b', adeoque eos ipsos valores erutos itidem e tabulis. Lineæ 6, & 7 continent valores a, & $-b = 0,3206$ duplos valoris $\frac{1}{H} = 0,1603$; quibus adduntur valores h, h', H excerpti e fine tabellæ numeri 34.

43. In iis postremis 5 lineis ejus columnæ 3 habetur demum fructus totius perquisitionis pro hoc primo casu. Ad habendam distantiam focalem cum prima lente convexa isoscelia, & secunda e flint corrigente, quantum licet, utrumque errorem diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ, debet radius binarum convexitatum esse 0,3206, primæ concavitatis 0,3201, secundæ 1,533 : distantia focalis realis primæ lentis erit 0,3048, virtualis secundæ 0,4384.

44. Si quæratur lens composita, quæ habeat distantiam focalem partium quotcumque scalæ cujusvis; multiplicandi erunt hi numeri per numerum earum partium contentum in ipsa distantia focali quæsita. Si exempli gratia quæratur distantia focalis pedum 3, sive pollicum 36; multiplicandi erunt ii numeri per 36, & habebuntur in pollicibus omnes ii radii, & eæ distantiæ focales. Ea ipsa multiplicatio obtineri potest per logarithmos: sed si communis is multiplicator sit brevis, ut hic; res citius expedietur per multiplicationem immediatam, ac retentis solis partibus decimis unius lineæ; cum nimirum minores sint fere insensibiles, & observationum, & calculi accuratio ad eas non pertingat : invenientur $a = 11,5$; $b = -11,5$; $a' = -11,5$; $b' = 55,2$; $h = 11,0$; $h' = -15,8$.

45. Porro combinatio horum vitrorum exhibuit radium tertium $a' = 0,3201$ fere æqualem secundo $b = -0,3206$, & primo a, quod in aliis vitris raro accidet, quartum vero 1,533 fere prorsus quintuplum eorundem : hinc ea combinatio est commodissima pro artificibus, cum exigat formam alterius superficiei concavæ ejusdem radii, quamvis curvaturæ contrariæ ei, quam requirunt binæ superficies convexæ : inde fit, ut altera adhiberi possit ad restituendam figuram alterius, ubi in atterendo vitro lædantur.

Ipsa

Ipsa æqualitas secundæ superficiei cum tertia est conditio assumpta pro casu II. Quamobrem posset omitti applicatio numerorum ad formulas ejus casus, quæ nimirum debent exhibere fere easdem mensuras pro radiis sphæricitatum. Verum opportuna erit etiam hic ea applicatio, ut appareat consensus formularum cum calculo numerico, utut non prorsus accurato.

CASUS II.

46. Hic casus habet binas lentes habentes superficies internas congruentes, & habentur numero 19 tres æquationes $\frac{G-C'}{a^2} - \frac{B+G-2C'}{a} + I + G - C' = 0$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 1$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} + u$. Calculus pro hoc casu est similis calculo pro casu præcedente, & exemplum habebit in tabella sequenti columnas itidem tres, sed paullo aliter ordinatas.

C = 2,012	$\frac{0,652}{a^2} - \frac{0,283}{a} - 0,020 = 0$	$\frac{1}{a^2} - \frac{0,4340}{a} - 0,0307 = 0$
− C' = − 1,360		
p = 0,652		
G = − 0,526	p = 0,652 . . $\bar{0}$,185752	$\frac{1}{a}$ = 0,2170 ± 0,2789
− 2C' = − 2,720	q = 0,283 . . 9,451786	
− 3,246	− r = 0,020 . . 8,301030	1 : H 9,204933
B = 3,529	q' = 0,4340 . . 9,637538	1 : a . . . . $\bar{0}$,304606
q = 0,283	r' = 0,0307 . . 8,486782	1 : b . . . . $\bar{0}$,297483
G = − 0,526	q'' = 0,1884 . . 9,275076	1 : b' . . . . $\bar{0}$,994391
− C' = − 1,360	$\frac{1}{4}$q'' = 0,0471	a = 0,3232 . . 9,509539
− 1,886		b = − 0,3180 . . 9,502416
I = 1,866	0,0778 . . 8,890980	a' = − 0,3180
r = − 0,020	± 0,2789 . . 9,445490	b' = 1,582 . . 0,199324
	− $\frac{1}{2}$q' = 0,2170	h = 0,3048
		h' = − 0,4384
	1 : a = 0,4959	H = 1
	1 : b = − 0,5041 = 1 : a'	
	u = 0,6054	
	1 : b' = 0,1013	

47. Prima columna exhibet coefficientes æquationis primæ particularis, quæ habetur in prima linea columnæ 2. Valores C = 2,012,

2,012, $-C' = -1,360$ sunt coefficientes primi, & tertii termini æquationis generalis numeri 33, quorum numerorum differentia ob signa contraria exhibet $p = 0,652$ coefficientem hujus æquationis novæ: $G = -0,526$ est coefficiens termini quarti æquationis generalis cum signo contrario: $-2C' = -2,720$ est duplum præcedentis $-C'$, quorum summa $= -3,246$ exhibet partem negativam numeri pertinentis ad coefficientem termini 2, nam valor G obvenerat negativus in fine primæ columnæ numeri 26. Valor $B = 3,529$ positivus est coefficiens termini secundi æquationis generalis assumptus cum signo contrario, quia ibi habebatur $-B$. Differentia ejus numeri a præcedenti negativo exhibet $q = 0,283$: is assumptus cum signo negativo, quod præmittitur in hac æquatione secunda toti secundo termino, est coefficiens termini secundi æquationis novæ. Demum in postremis 5 lineis columnæ primæ habetur calculus pro postremo termino $r = I + G - C'$, quorum postremi duo ambo negativi ob $G = -0,526$, & $-C' = -1,360$, jam habentur in hac ipsa columna, primus $I = 1,866$ est in æquatione generali terminus postremus, posito 6 pro postremis 59. Ex summa binorum negativorum, & tertio positivo obtinetur $r = -0,020$ terminus postremus ipsius æquationis novæ.

48. In reliqua secunda columna calculus procedit prorsus eodem pacto, quo in secunda columna tabulæ numeri 37 usque ad valorem $\frac{1}{a} = 0,4959$; sed hic pro ipso assumitur valor positivus e binis lineæ 10, quia assumpto negativo is obveniret quidem exiguus, sed $\frac{1}{b}$ evaderet nimis magnus. Valor $\frac{1}{a}$ ablatus ab unitate relinquit in linea 12 valorem $\frac{1}{b} = -0,5041$, qui est itidem $= 1:a'$ ob congruentiam superficiei tertiæ cum secunda: succedit u, & $1:b'$ ex $1:a'$, prorsus ut in tabula numeri 37.

49. In tertiâ columnâ prima linea habet æquationem liberam a coefficiente termini primi: coefficiens secundi, & tertii est valor q', & r' columnæ præcedentis: in linea secunda habetur valor

lor $\frac{1}{a}$, cujus primus terminus 0,2170 desumitur e linea 10 columnæ 2, secundus cum duplici signo $\pm$ 0,2789 e linea 9. Reliqua in ea columna procedunt eodem modo, quo in tabula numeri 37.

50. Logarithmus 1:H in linea 3 est idem, ac in tabula ipsius 37. Quarta, quinta, & sexta habent complementa logarithmica valorum $1:a$, $1:b$, $1:b'$, qui in fine columnæ 2 sunt 0,4959; 0,5041; 0,1013. Lineæ 7, 8, 10 habent summas numerorum logarithmicorum linearum 4, 5, 6, additarum seorsum cum logarithmó lineæ tertiæ. Hinc numeri respondentes iis summis exhibent in iisdem lineis 7, 8, 10 valores a, b, b'. Valor a' æqualis b in hac hypothesi habetur post ipsum in lin. 9. Valores h, h', H sunt hìc prorsus iidem, qui in tabula numeri 37.

51. Hæc combinatio differt nonnihil a præcedente, sed parum admodum: priores tres superficies habent radios fere æquales, nimirum príma 0,3232, sequentes binæ $-$0,3180. Quarta habet radium 1,582 paullo majorem quintuplo prioris, qui quidem est paullo major eo, qui habebatur in præcedenti tabula numeri 37, quia tertius est paullo minor, quam ibidem. Distantiæ focales h, h' pro omnî vitrorum genere erunt eædem in hisce binis casibus: sed radii sphæricitatum a, & b, qui in hac combinatione vitrorum obvenerunt fere iidem, in aliis obveniunt admodum diversi.

CASUS III.

52. Hic casus lentis primæ datæ habet duas æquationes numero 21; sed præparandus est ante valor $n = \frac{g}{g'}$, existentibus g, & g' radiis datis superficierum 1, & 2. Sit lens prima utrinque convexa, radius primæ superficiei linearum 250, secundæ 300. Erit $g = 250$, $g' = -300$. Valores reliqui eruentur inde facile methodo simili ei, quæ adhibita est in superioribus, & exemplum habebit in tabella sequenti itidem columnas tres.

$g =$

$g =$ 250 . . 2,397940	$\frac{1,360}{a'^2} - \frac{0,526}{a'} - 0,5398 = 0$	g 2,397940
$.g' = -$ 300 . . $\bar{7}$,522879		$.(1-n)$ . . . . . $\bar{9}$,736838
$n = -0,833$ . . 9,920819		$g:(1-n)$ 2,134778
B 0,547618	$.p$ (*) . . . . . . $\bar{9}$,866396	$.1:a'$ . . . . . . $\bar{0}$,331894
$.(1-n) = 1,833$ . . $\bar{9}$,736838	$r = -0,5398$ . . 9,731233	$.1:b'$ . . . . $\bar{0}$,854804
1,925 . . 0,284456	$r' =$ 0,3969 . . 9,598629	$.1:h$ . . . . $\bar{0}$,179014
C 0,303677	$\frac{1}{4}q'^2 =$ 0,0374	$.1:h'$ . . . . $\bar{0}$,436940
$.2.(1-n)$ . . . . . $\bar{9}$,473676		$.1:$H . . . . $\bar{0}$,795067
$-$ 0,5989 . . 9,777353	0,4343 . . 9,637790	$a' = -$ 292,9 . . 2,466672
$-$I $= -$ 1,8659	$\pm$ 0,6590 . . 9,818895	$b' =$ 976,3 . . 2,989582
$-$ 2,4648	$-\frac{1}{2}q' =$ 0,1933	$h =$ 259,3 . . 2,413792
$-$ 0,5398	$1:a' = -$ 0,4657	$h' =$ 373,0 . . 2,571718
	$u =$ 0,6054	H $=$ 850,8 . . 2,929845
	$1:b' =$ 0,1397	

53. Prima columna habet initio valorem g cum suo logarithmo, & g' cum suo complemento logarithmico: summa eorum logarithmorum exhibet in lineâ 3 logarithmum numeri n, & ipsum numerum: logarithmi valorum B lineæ 4, C lineæ 7, cum valore $-$ I lineæ 10 desumpti sunt e tabula numeri 26. In linea 5 habetur valor $1-n$ cum suo complemento logarithmico, & in 8 duplum ejus complementi. Hinc per summam logarithmorum habetur in linea 6 valor $\frac{B}{1-n} = 1,925$, & in 9 valor $\frac{C}{(1-n)^2} = -0,5989$: summa hujus, & $-$ I habetur in linea 11 $= -2,4648$: summa hujus negativi cum positivo lineæ 6 exhibet in lin. 12 valorem $-0,5398$, qui est postremus terminus æquationis in linea 1 columnæ 2. Priores duo termini æquationis erant $\frac{C'}{a'^2} + \frac{G}{a'}$ iidem, qui in casu primo numeri 18, qui idcirco desumuntur ex linea 6 columnæ 1 tabellæ numeri 37. Hinc pro solutione ejus æquationis valores p, q sunt hîc iidem, ac ibi, adeoque iidem q', $\frac{1}{2}q'$, $\frac{1}{4}q'^2$. Cum valor r sit hîc diversus; ad habendum r' habetur

(*) Hic valor p idem, ac in columna 2 numeri 37, respondens valori C' $=$ 1,360 erutus e logarithmo tabulæ numeri 26, habet hîc complementum illius logarithmi, ut in ipsa tabula numeri 37.

betur in secunda linea columnæ secundæ valor p cum suo complemento logarithmico, in tertia r cum suo logarithmo, adeoque in 4 logarithmus valoris $r' = \frac{r}{p}$, cum ipso valore: in 5 valor $\frac{1}{4}q'^2$, in 6 eorum summa cum suo logarithmo, in 7 dimidium ejus logarithmi cum suo valore $\pm$ 0,6590, qui est pars termini irrationalis: ea hic assumitur negativa, & cum valore $-\frac{1}{2}q'$ lineæ 8 exhibet in lin. 9 valorem $\frac{1}{a'}$, quæ est radix æquationis. Ipsi succedit valor u in lin. 10 idem, ac in lin. 12 columnæ 2 numeri 37, & ipsorum summa 0,1397, qui est valor $\frac{1}{b'}$ lineæ ultimæ.

54. Columna tertia expedit valores numeri $\overline{22}$, in quo præscribitur divisio valoris $\frac{g}{1-n}$ per valores $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{H}$ ad habendos valores a', b', h, h', H in iisdem partibus, in quibus dabantur valores $a = g$, $b = g'$. Priores duæ lineæ habent g cum suo logarithmo, & $1-n$ cum suo complemento logarithmico, qui numeri desumuntur ex linea 1, & 5 columnæ 1: eorum summa exhibet in linea 3 logarithmum valoris $g:(1-n)$, & valorem ipsum: tum in 4, & 5 habentur complementa logarithmica valorum $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$ inventorum in columna 2, quæ complementa desumenda sunt e tabula logarithmorum: complementa $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$ habentur in tabella numeri 34, & cum ibidem habeatur logarithmus numeri $\frac{1}{H}$ in linea 5, ejus complementum eruitur inde pro linea 8 hujus columnæ. Horum quinque complementorum seorsum summa cum logarithmo lineæ 3 exhibet, in quinque lineis sequentibus logarithmos valorum a', b', h, h', H, & ipsos valores quæsitos.

55. Jam habebantur radii lentis primæ utrinque convexæ linearum 250, & 300: obveniunt radii lentis utrinque concavæ 292,9, & 976,3, ac foci singularum lentium seorsum realis 259,3, virtualis 373,0, & focus communis utriusque conjunctæ 850,8.

CA-

CASUS IV.

56. Hic casus lentis secundæ datæ ita est similis tertio primæ datæ, ut supervacaneum videatur addere pro ipso exemplum numericum. Poscit itidem valorem $n = \frac{g}{g'}$: tum habet duas æquationes pro $\frac{1}{a}$, & pro $\frac{1}{b}$, quarum prior adhibet pro prioribus binis terminis numeratores C, & B desumendos ex exemplo casus II numeri 46, ut casus III adhibebat C', & G desumptos ex exemplo casus I numeri 37. Numeri, & signa diversa sunt: forma calculi est eadem.

§. IV.

Explicatio formularum paragraphi IV cum exemplis.

57. In hoc paragrapho habentur formulæ pro objectivo acromatico composito ex tribus lentibus destruentibus, quantum licet, errorem tam diversæ refrangibilitatis, quam figuræ sphæricæ, quarum extremæ convexæ e vitro communi, media concava e flint. Determinatio arbitraria in paragrapho 3 erat unica, cum deberent determinari quatuor radii: una e determinationibus pertinebat ad relationem mutuam respondens magnitudini distantiæ focalis absolutæ, binæ aliæ respondebant correctioni binorum errorum, quarta erat arbitraria. Hic habentur sex radii determinandi, adeoque determinationes arbitrariæ sunt tres, quod exhiberet ingentem numerum applicationum particularium. Sed selegimus tres (*), quæ faciliorem reddant executionem, cum requirant formas sphæricas pauciores. Sunt autem 1°. lentes extremæ isosceliæ, & æquales, in quo casu forma pro omnibus quatuor superficiebus convexis est eadem, & destructio binorum errorum determinat binas pro concavis: 2°. primæ duæ lentes isosceliæ,

(*) Multo plures occurrent in supplemento I hujus Opusculi.

sceliæ, & æquales, in quo casu determinantur radii binarum superficierum lentis secundæ : revera hic casus requirit formas quatuor, tres pro superficiebus convexis, & unam pro concavis; sed cum radius sphæricitatis concavarum sit æqualis radio primæ convexæ; res reducitur ad eundem numerum formarum : nam ad restituendam figuram formæ adhibitæ, quæ nonnihil mutatur ab attritu, semper solent adhiberi binæ, altera convexa, altera concava; unde fit, ut hic etiam haberi debeant tria formarum paria, ut ibi : 3°. omnes tres lentes isosceliæ, qui casus videtur cæteris præferendus, cum reliqui requirant in aliqua e superficiebus plures gradus sphæricitatis : nam in lente non isoscelia defectum superficiei minus curvæ debet supplere altera magis curva, & semper minores curvaturæ præferri debent ob quantitates ordinum inferiorum neglectas, quæ eo majores sunt, quo plures gradus curvaturæ assumuntur. Hic casus requirit formas tantummodo tres; sive itidem tria paria ad restituendam figuram.

58. Formulæ applicatæ ad binos priores casus mihi exhibuerunt per sese æquationem gradus secundi, tertia obtulerat æquationem gradus tertii. Cum applicassem numeros petitos ex iisdem vitris, quos in præcedentibus adhibui, radix eruta exhibuit mihi pro tertia lente valorem negativum æqualem valori positivo primæ, adeoque lentem concavam, & sphæricitatis ejusdem cum prima, quod quidem primo me perculit, ut jam monui in adnotatione ad numerum *69* capitis II (*); nam in primo casu, in quo lentes extremæ sunt isosceliæ ambæ convexæ, & æquales, obvenerat mihi in eo vitrorum genere fere isoscelia etiam media concava; adeo-

(*) Maxima pars eorum, quæ occurrunt hic, & in sequentibus binis numeris habetur in ea adnotatione, quam adjeci, postequam hæc omnia conscripseram : ea hic retineo, tum quia nonnulla expressa sunt hic paullo aliter, tum ne numerorum ordo inverteretur in citationibus. Recurret autem sermo de hac combinatione adhuc in supplemento I hujus Opusculi, ubi patebit, quo pacto hic inveniatur etiam casus, in quo omnes superficies sint planæ, qui non pertinet ad hanc æquationem tractatam more solito, ut innui in sequente numero 59.

adeoque expectabam valorem pro tertia positivum ; & proxime æqualem valori lentis primæ. Hinc errorem suspicatus in formulis, & calculo numerico: omnia iterum revocavi ad trutinam, & cum nihil erroris deprehenderem, quæsivi reliquas binas radices, quæ mihi obvenerunt imaginariæ. Considerando radium secundæ lentis respondentem illi primæ radici reali, inveni valorem infinitum, quod quidem videbatur magis mirum; sed id ipsum exhibuit evolutionem ænigmatis; re enim considerata animadverti, per eam primam radicem exhiberi solutionem, quæ nihil prosit pro habendo objectivo acromatico, debeat tamen exhiberi ab æquatione generali destruente binos illos errores per tres lentes isoscelias. Nam radius infinitus lentis mediæ exhibet binas superficies planas, quarum altera destruit effectum alterius, & radii extremi æquales, sed cum signis oppositis, exhibent binas lentes sphæricitatum contrariarum æqualium, quarum altera idcirco itidem destruit effectum alterius. Errores corriguntur, sed per combinationem, in qua focus abit in infinitum, destructis erroribus ipsis, sed per destructionem totius refractionis necessariæ ad formandam imaginem objecti.

59. Eadem æquatio exhibuisset etiam casum, in quo omnes radii essent infiniti, adeoque omnes superficies planæ; nisi in reductione formularum valorem radii lentis primæ assumpsissem pro unitate. Hinc exhiberi non potuit ille casus, sed hic tantummodo, in quo lens media habet superficies planas, & extremæ curvaturas contrarias æquales.

60. Ad id exhibendum illa radix debet evadere æqualis quantitati datæ respondenti radio primæ lentis, quem ego assumebam, ut unitatem quandam, ad quam cæteri valores referri possent. Habita una radice æquationis gradus tertii, ea facile reducitur ad gradum secundum, adhibendo pro coefficiente secundi termini coefficientem præcedentem imminutum per eam radicem assumptam cum signo contrario, sive, quod idem est, auctum illa radice, & pro postremo postremum præcedentem divisum per valorem eundem itidem assumptum cum signo contrario. Eo pacto æquatio evasit multo simplicior, redacta ad eam formam, quæ

in

in hoc numero exhibetur. Numeris applicatis, radices ejus æquationis evaserunt imaginariæ; sed terminus imaginarietatem continens erat perquam exiguus, valore nimirum negativo perquam exiguo incluso sub signo radicali. Eo valore neglecto obveniunt binæ radices reales æquales, sive unica radix realis dupla. Ea mihi exhibuit valorem quamproxime eundem, quem primus casus exhibuerat, quod mihi ostendit, & formulas, & calculum numericum carere omni errore, quem initio suspicatus fueram ob phænomenum inexpectatum valoris illius negativi radicis postremæ. Omnem calculum numericum redditum ita simpliciorem jam hic evolvam.

61. Numero $\overline{26}$ innuitur methodus. inveniendi radios sphæricitatum, & distantias focales singularum lentium respondentes distantiæ focali communi $= 1$: distantia focalis h' lentis secundæ in omnibus hisce casibus debet esse pro iisdem vitris eadem, nimirum illa ipsa, quæ pertinet ad omnes casus binarum lentium; nam ea pendet a sola correctione erroris diversæ refrangibilitatis, pro qua binæ lentes convexæ præstant idem, ac unica habens distantiam focalem æqualem ei, quam habent ipsæ conjunctæ, quod occurrit etiam numero $\overline{30}$.

CASUS I.

62. Pro hoc casu binarum lentium extremarum isosceliarum, & æqualium habentur denominationes num. $\overline{28}$, æquationes num. $\overline{29}$; sed num. $\overline{30}$ habetur methodus eruendi facilius plures valores ex denominationibus numeri $\overline{16}$, qui habentur in tabula numeri 26. Remanent inveniendi c', D, E, F, G, I. Omnia continentur in tabella sequenti, quæ habet binas partes: earum autem prima habet columnas tres, secunda duas: sed sub secunda, & tertia columna primæ partis habetur æquatio inde deducta.

PARS

PARS I.

$-\frac{1}{2}(m-1) =$	$-0,263$	$A =$	0,5070	$B =$	0,4411
$u(m'-1) =$	0,3657	$B =$	0,4411	$D =$	0,1247
$c' =$	0,1027	$C =$	0,1257	$A' =$	0,5708
.4	$\bar{9}$,397940	$D =$	0,1247	$F' =$	0,1778
c	9,939949	$E =$	0,0740		1,3144
c'	9,011570	$F =$	0,0198	$A =$	0,5070
$3m+1$	0,746478	$A' =$	0,5708	$C =$	0,1257
$D =$ 0,1247 . .	9,095937	$B' =$	1,542	$E =$	0,0740
cc'	8,951519	$C' =$	1,360	$F =$	0,0198
$m+1$	0,402433	$D' =$	0,560	$D' =$	0,560
$.2m =$ 3,052 . .	$\bar{9}$,515416	$E' =$	1,034		$-$ 1,2865
$E =$ 0,0740 . .	8,869368	$F' =$	0,1778	$I =$	0,0279
cc'	8,951519	$B' =$	1,542		
c'	9,011570	$-E' =$	$-1,034$		
$3m+2$	0,818094	$G =$	0,508		
.2m	$\bar{9}$,515416				
$F =$ 0,0198 . .	8,296599				

$$\frac{1,360}{a'^2} + \frac{0,508}{a'} + 0,0279 = 0.$$

PARS II.

.p (*)	$\bar{9}$,866495	$.1 : a' = -0,3067$	$\bar{0}$,513286
$q =$ 0,508 . . .	9,705864	$u =$ 0,6054	
$r =$ 0,0279 . .	8,445604	$.1 : b' =$ 0,2987	$\bar{0}$,524765
$q' =$ 0,3735 . .	9,572359	2 : H	9,204933
$r' =$ 0,0205 . .	8,312099	$a' = -0,5227$	9,718219
$q'' =$ 0,1396 . .	9,144718	$b' =$ 0,5367	9,729698
$\frac{1}{4}q'^2 =$ 0,0349		$a = -b = a'' = -b'' = 0,6412$	
0,0144		$h =$ 0,6096	
$\pm$ 0,1200		$h' = -0,4384$	
$-\frac{1}{2}q' = -0,1867$		$h'' =$ 0,6096	
$1 : a' = -0,3067$		$H = 1.$	

(*) Hic itidem habetur pro complemento logarithmi valoris 1,360 positi pro coefficiente primi termini æquationis ex logarithmo valoris C' tabulæ numeri 26 complementum hujus.

63. Prio-

63. Priores duæ lineæ primæ columnæ partis I habent binos valores, qui possunt desumi ex lin. 1, & 4 columnæ 1 num. 6 (*): tertia continet valorem c' ipsorum differentiam. In quinque sequentibus habetur calculus pro valore $D = \frac{1}{4}cc'(3m+1)$. Logarithmus valoris c' lineæ tertiæ eruitur ex tabula logarithmorum, reliqui ex eadem, vel ex tabula numeri 26. Quatuor sequentes lineæ habent calculum pro valore $E = \frac{cc'(m+1)}{2m}$. Logarithmus cc' est summa eorum, qui habentur in linea 5, & 6 hujus columnæ: logarithmus $m+1$, & valor $2m$ eruuntur ex 1 columna tabulæ numeri 26, hujus complementum logarithmicum ex tabula logarithmorum. Postremæ quinque lineæ exhibent valorem $F = \frac{cc'^2(3m+2)}{2m}$. Pro cc' habetur logarithmus in linea 9 hujus columnæ, pro c' in 6, & eorum summa exhibet logarithmum cc'^2: pro $2m$ habetur in lin. 11, pro $3m+2$ in lin. 14 columnæ 2 tabulæ numeri 26.

64. Pro secunda columna primi 3 valores, & postremi 6 eruuntur ex tabula numeri 26 ope numeri 30 exhibentis horum relationes ad illos; quartus, quintus, & sextus ex columna 1 hujus tabulæ. Pro fine ipsius columnæ inventio valoris G ex præcedentibus patet per sese. In tertiâ columnâ linea 5 continet summam quatuor positivorum valoris I, linea 11 summam quinque negativorum, 12 differentiam harum, quæ est valor I quæsitus. Æquatio subsequitur, cujus primi termini numerator C' habetur in columna

(*) Numero 6 non habentur nisi quinque notæ decimalium in logarithmo valoris $u(m'-1)$, qui est ibi 9,56306: ex tertia, & quinta linea columnæ a tabulæ numeri 26 eruitur idem integer logarithmus 9,563060, cui respondet numerus 0,36565, & quidem logarithmus hujus est 9,5630606, ut idcirco potius ponendum fuerit pro eo valore 0,3656, quam 0,3657. Id animadverti, dum omnes hosce calculos ad rigidiorem trutinam revocarem: sed cum id discrimen sistat in fractionibus tantummodo quintæ classis decimalium, & sæpe hic contemnantur etiam eæ, quæ pertinent ad quartam; censui potius retinendum hunc numerum, quam immutandum logarithmum valoris c', qui in sequentibus recurrit aliquoties, quo mutato multi alii valores exiguas mutatiunculas subirent, sed nullius momenti.

lumna 3 numeri 26, secundi G numerator, & tertius I sunt inventi in columna 2, & in hac 3 hujus partis I.

65. Pars secunda exhibet in prima columna resolutionem æquationis eodem pacto, quo ejusmodi resolutio obtinetur in columna 2 tabellæ numeri 37 per formulas exhibitas ibidem. Sunt p, q, r tres numeri trium terminorum æquationis, $q' = \frac{q}{p}$, $r' = \frac{r}{p}$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}q' \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q'' - r')}$. Prima linea primæ columnæ habet p cum suo complemento logarithmico, secunda, & tertia q, & r cum suis logarithmis, quorum singulorum summa cum eo complemento exhibet in lin. 4, & 5 logarithmos valorum q', & r'. Duplum logarithmi lineæ 4 exhibet in lin. *6* logarithmum, & valorem q'': in 7 habetur ejus quadrans, in 8 differentia ipsius, & $-r'$ quintæ. Cum ea obvenerit 0,0144 in lin. 8; patet primo intuitu, ejus radicem esse 0,1200, quæ habetur in linea *9*: linea 10 habet $-\frac{1}{2}q'$, & assumptâ radice cum signo negativo $-$ 0,1200, ejus summa cum $-\frac{1}{2}q'$ exhibet in linea 11 valorem $\frac{1}{a'}$ quæsitum.

66. Is repetitur in prima linea columnæ 2: in secunda habetur u, ut in penultima columnæ 2 numeri 37, quorum valorum summa exhibet in tertia valorem $\frac{1}{b'}$. In 1, & 3 apponuntur bina complementa logarithmica, tum in 4 logarithmus valoris $\frac{1}{\text{H}}$, qui juxta num. $\overline{30}$ est hìc idem, ac in lin. 1 columnæ 3 tabellæ numeri 37. Hujus summa cum logarithmis præcedentibus exhibet in lineis 5, & *6* logarithmos valorum a', & b', ac ipsos valores. Linea 7 continet valorem communem a, $-b$, a'', $-b''$, qui est duplus valoris a, & b columnæ tertiæ ejusdem tabellæ numeri 37. Sunt autem hìc h, & h'' itidem dupli eorum, qui habebantur ibidem, h' æqualis, & H $=$ 1.

67. Poterat in linea *9* columnæ primæ adhiberi radix positiva $+$ 0,1200: tum obvenisset in linea ultima $\frac{1}{a'} = -$ 0,0667, quod exhiberet radium sphæricitatis ingentem, adeoque commo-

 dum

dum pro prima superficie secundæ lentis; sed tum in lin. 3 columnæ 2 obvenisset $\frac{1}{b'} = 0{,}5387$; unde profluxisset secundus radius b', multo brevior. Eam ob causam adhibuimus potius $-0{,}1200$.

CASUS II.

68. Is casus habetur num. $\overline{31}$, in quo radii priorum quatuor sphæricitatum sunt æquales. Præcedunt denominationes num. $\overline{32}$, æquationes num. $\overline{33}$ cum methodo solita inveniendi valores finales radiorum, & distantiarum focalium relate ad valorem $H = 1$ Verum numero $\overline{34}$ habetur methodus eruendi plures valores numeri $\overline{32}$ facilius ex jam inventis. Is numerus habendus est præ oculis ad intelligendum progressum calculi numerici, quem continet sequens tabula: ea habet, ut præcedens, binas partes, quarum prima habet itidem columnas tres, secunda duas.

PARS I.

$c' = 0{,}078$ .. $8{,}892095$	B .... $0{,}547618$	$B'' = 1{,}500$
$u' = 0{,}652$ .. $9{,}814248$	$2.u'$ .... $9{,}628496$	$-E'' = -0{,}2932$
$A = 2{,}028$ $B' = 2{,}104$	$B'' = 1{,}500$ .. $0{,}176114$	$G = 1{,}2068$
$B = 1{,}7645$	C .... $0{,}303677$	$A = 2{,}028$
$C = 0{,}503$	u' .... $9{,}814248$	$C = 0{,}503$
$A' = 2{,}573$	$C'' = 1{,}312$ .. $0{,}117925$	$B' = 2{,}104$
$m' + 2$ ..... $0{,}556785$	c .... $9{,}939949$	$D' = 3{,}057$
.4 .... $\bar{9}{,}397940$	c' .... $8{,}892095$	$A'' = 0{,}5621$
m' .... $\bar{9}{,}794796$	$2.u'$ .... $9{,}628496$	$F'' = 0{,}0149$
$C' = 0{,}5617$ .. $9{,}749521$	$3m + 1$ ..... $0{,}746478$	$8{,}2690$
$3m' + 1$ .... $0{,}764326$	$D'' = 0{,}1611$ .. $9{,}207018$	$B = 1{,}7645$
$m - 1$ ..... $9{,}720986$	4 .... $0{,}602060$	$A' = 2{,}573$
$D' = 3{,}057$ ... $0{,}485312$	cc' .... $8{,}832044$	$C' = 0{,}5617$
E' .... $0{,}315506$	u' .... $9{,}814248$	$E' = 1{,}708$
.2 .... $\bar{9}{,}698970$	$m + 1$ ..... $0{,}402433$	$F' = 1{,}175$
$.u$ .... $\bar{0}{,}217977$	$.m$ .... $\bar{9}{,}816446$	$D'' = 0{,}1611$
$E' = 1{,}708$ .. $0{,}232453$	$E'' = 0{,}2932$ .. $9{,}467231$	$-7{,}9433$
F' .... $9{,}852066$	cc' .... $8{,}832044$	$I = 0{,}3257$
$.u$ .... $\bar{0}{,}217977$	c' .... $8{,}892095$	
$F' = 1{,}175$ .. $0{,}070043$	u' .... $9{,}814248$	
A .... $0{,}307058$	$3m + 2$ ..... $0{,}818094$	
$3.u'$ .... $9{,}442744$	$.m$ .... $\bar{9}{,}816446$	
$A'' = 0{,}5621$. $9{,}749801$	$F'' = 0{,}0149$ .. $8{,}172927$	

PARS

PARS II.

$\frac{1,312}{a''} - \frac{1,207}{a''} - 0,3257 = 0$	u' 9,814248
$.p$(*) . . . . $\overline{9},882075$	$m - 1$ 9,720986
$q = -1,207$ . . 0,081707	$1 : h'' = 0,343$ 9,535234
$r = -0,3257$ . . 9,512818	$-c' = -0,078$
$q' = -0,9200$ . . 9,963782	$1 : H = 0,265$ 9,423246
$r' = -0,2482$ . . 9,394893	$.1 : a''$ . . . . $\overline{0},661344$
$q'^2 = 0,8464$ . . 9,927564	$.1 : b''$ . . . . $\overline{0},060431$
$\frac{1}{4}q'^2 = 0,2116$	$.1 : h = m - 1$ . . . . $\overline{0},279014$
0,4598 . . 9,662569	$.1 : h' = -(m' - 1)$ . . . . . . $\overline{0},218963$
$\pm$ 0,6781 . . 9,831284	$.1 : h''$ . . . . $\overline{0},464766$
$-\frac{1}{2}q' = 0,4600$	$a'' = 1,215$ 0,084590
$1 : a'' = -0,2181$	$b'' = -0,3046$ 9,483677
$-u' = -0,652$	$h = 0,5038$ 9,702260
$1 : b'' = -0,8701$	$h' = -0,4388$ 9,642209
	$h'' = 0,7727$ 9,888012
	$H = 1,\ a = -b = -a' = b' = 0,530$

69. Linea 1 partis I continet $c' = m' - m$, qui valor est differentia valorum lineæ 1, & 2 tabulæ numeri 26, secunda valorem $u' = \frac{1}{u} - 1$, qui facile invenitur: satis est e tertia linea tabulæ numeri 26 assumere complementum logarithmi valoris u, cujus hic etiam occurrit usus inferius: est autem $\overline{0},217977$, cujus numerus 1,652 dempto 1 exhibet $u' = 0,652$. Utrique apponitur suus logarithmus adhibendus in sequentibus. Consequuntur valores A, B, C, A', B', qui ope numeri $\overline{34}$ eruuntur e tabula

(*) Hoc etiam non est complementum logarithmi numeri 1,312 assumpti pro coefficiente primi termini æquationis p ex logarithmo valoris C'' tabulæ præcedentis, sed complementum hujus. Utrumvis adhibitum nihil immutasset valores finales; cum substitutio alterius pro altero ferat secum differentias ordinis etiam inferioris ad plures exiguas fractiones neglectas; sed & hic, & in superioribus exemplis id notandum censuimus, ne quis considerans solum complementum logarithmicum numeri, qui assumendus fuisset pro p, censeat, errorem irrepsisse in hisce calculis, adeoque diffidat & his, & reliquis.

bula numeri 26. Est enim valor A idem ac ibi, B dimidium illius, C quadrans illius: $A' = m''$ est numerus respondens logarithmo valoris $2.m'$, qui habetur in lin. 12 columnæ 3 illius tabulæ: $B' = \frac{1}{2}(2m'+1)$ est dimidium valoris $2m'+1$, qui habetur in lin. 11 columnæ 1 illius tabulæ. Pro reliquis requiritur calculus, quem continet reliquus progressus hujus primæ partis.

70. Valor C' est $= \frac{m'+2}{4m'}$. Logarithmi $m'+2$, & complementa logarithmica 4, & m' eruuntur ex columna 2, & 4 illius tabulæ: ea habentur hic in lineis 7, 8, 9, unde in linea 10 habetur valor C'. Est hic $D' = (3m'+1)(m-1)$: habentur in lin. 11, & 12 logarithmi $3m'+1$, & $m-1$ eruti ex secunda columna illius tabulæ; inde prodit D' in lin. 13. Valor E' hujus casus est E' illius tabulæ divisus per $2u$. Hinc lin. 14 habet logarithmum valoris E' erutum ex lin. 14 columnæ 4 illius, complementum logaritmicum u erutum ex lin. 3 columnæ 2 illius, & complementum logarithmi numeri 2 erutum ex tabula logarithmorum. Inde E' hic in lin. 17. Ad habendum F' hujus casus, debet F' illius tabulæ dividi per u. Hinc linea 18 hujus primæ columnæ habet logarithmum F' illius erutum ex postrema ejus linea, & linea 10 complementum logarithmicum valoris u, quod jam habetur hic ante lineas tres. Inde in lin. 20 habetur novus valor F'. Valor A'' est A illius tabulæ ductus in u'^3: linea 21 habet log. A erutum ex lin. 5 columnæ 3 illius, & linea 22 triplum logarithmi u', qui habetur in lin. 2 hujus columnæ, ex quibus profluit hic A'' in linea ultima.

71. Progrediendum ad columnam 2 hujus tabulæ. Ea incipit a determinatione valoris $B'' = u'^2 B$. In linea 1 habetur log. B erutus ex lin. 7 columnæ 3 illius, & in lin. 2 duplum logarithmi u' eruti ex lin. 2 columnæ 1 hujus tabulæ. Inde prodit B'' in lin. 3. Valor $C'' = u'C$ obtinetur ponendo in lin. 4 logarithmum C erutum ex lin. 10 columnæ 3 illius tabulæ, & in 5 logarithmum u' ex lin. 2 primæ columnæ hujus: sic in lin. 6 obtinetur C''. Pro $D'' = cc'u'^2(3m+1)$ habentur in 4 sequentibus lineis logarithmus c erutus e lin. 3 columnæ 3 illius, log. c' ex lin. 1 columnæ 1 hujus,

jus, log. u'^2, sive $2.u'$ jam adhibitus in lin. 2 hujus columnæ, $3m+1$ ex lin. 12 columnæ 2 illius tabulæ. Valor D'' inde inventus habetur in lin. 11. Pro $E'' = \frac{4cc'u'(m+1)}{m}$ habetur in lin. 12, 13, 14, 15, 16, log. 4 erutus ex linea 16 columnæ 2 illius tabulæ: log. cc' erutus ex lin. 7, & 8 hujus columnæ addendo simul log. c, & log. c': log. $(m+1)$ erutus ex lin. 6 columnæ 2 illius: complementum logarithmi m erutum ex lin. 9 columnæ 3 illius. Inde in linea 17 prodit valor E'', ac demum pro $F'' = \frac{cc''u'(3m+2)}{m}$ lineæ 18, 19, 20, 21, 22 habent log. cc' ex lin. 13 hujus columnæ, c' ex lin. 1 præcedentis, u' ex lin. 2 ejusdem, $3m+2$ ex lin. 14 columnæ 2 illius tabulæ, & compl. log. m ex lin. 16 hujus. Sic in linea postrema obvenit F''.

72. Hisce evolutis prona est evolutio columnæ tertiæ. In linea 3 habetur valor $G = B'' - E''$, tum in linea 10 summa sex valorum positivorum, in lin. 17 summa sex negativorum valoris I, qui habetur in lin. 18, subductâ hac ab illâ. Hi sunt numeri pertinentes ad secundum, & tertium terminum æquationis, quæ habetur in ipso initio partis II hujus tabulæ, posito in fine denominatoris secundi termini 7 pro 68: numerus primi termini est C'' hìc inventus in lin. 6 columnæ 2.

73. Pars II exhibet in columna 1 solutionem æquationis, & inventionem valoris $\frac{1}{b''}$ ex $\frac{1}{a''}$, quæ fiunt prorsus eodem modo, quo in 2 columna tabellæ numeri 37, 46, 63. Porro hìc deberet haberi pro p numerus respondens valori C'' tabulæ præcedentis, tum ex eadem tabula $q = -1{,}207$, $r = -0{,}3257$, & quæritur $\frac{1}{a''}$, ac $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - u'$, valore u' assumpto ex lin. 2 columnæ 1 partis I. Columna secunda in prioribus tribus lineis exhibet inventionem valoris $\frac{1}{h''} = u'(m-1)$, pro quo habetur log. u' in lin. 2 columnæ 1 partis I, & log. $(m-1)$ in lin. 12 ejusdem:

linea

linea 4 habet $-c'$, linea 5 valorem $\frac{1}{H} = \frac{1}{h''} - c'$. Huic adscribitur suus logarithmus, tum habentur complementa logarithmica valorum $\frac{1}{a''}$, & $\frac{1}{b''}$ eruenda e tabula logarithmorum, valorum $\frac{1}{h} = m - 1$, $\frac{1}{h'} = -(m' - 1)$ eruenda e lineis 4, & 5 columnæ 2 tabulæ numeri 26, & complementum logarithmicum valoris $\frac{1}{h''}$ eruendum e linea 3 hujus columnæ. Singulorum summa cum logarithmo $\frac{1}{H}$ lineæ 5 exhibet logarithmos valorum a'', b'', h, h', h'' respondentium valori $H = 1$, & valores ipsos. In linea ultima post ipsum $H = 1$ habetur valor radii priorum 4 superficierum habentium sphæricitates æquales, qui est valor $a = -b = -a' = b'$, & obtinetur duplicando valorem $\frac{1}{H} = 0,265$ lin. 5, cum valor $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'}$ sit hic $= \frac{1}{2}$, & per ipsum sit dividendus valor $\frac{1}{H}$.

74. Si in linea 10 columnæ 1 partis II assumptus fuisset valor radicis negativus; valor $\frac{1}{a''}$ in linea 12 obvenisset $-1,1381$, qui exhibuisset valorem a'' nimis exiguum, adeoque curvaturam nimis magnam superficiei penultimæ, quam ob causam ea solutio debet rejici.

CASUS III.

75. Is casus habetur numero 35, & pertinet ad omnes tres lentes isoscelias. Num. 36 habentur denominationes, quarum plures reducuntur num. 38 ad jam inventas. Num. 37 habentur æquationes, & methodus solita reducendi valores quæsitos ad unitatem $= H$. En tabulam pro hoc casu postremo, quæ habet itidem partes duas: prima habet columnas 4, secunda tres.

PARS

PARS I.

$u' =$ 0,3206 . . .	9,505963
$A =$ 16,224 : $C =$ 4,024	
$B =$ 14,116 : $A' =$ 4,5664	
4	0,602060
u	9,782023
B'	0,188122
$B' =$ 3,734 . . .	0,572205
2	0,301030
$2.u$	9,564046
C'	0,133604
$C' =$ 0,9970 . . .	9,998680
$D' =$ 8,960	
$4u$	0,384083
E'	0,315506
$E' =$ 5,007 . . .	0,699589
$F' =$ 5,6904	
8	0,903090
c	9,939949
u	9,782023
$m'-1$	9,781037
$3m+1$	0,746478
$I =$ 14,2094 . . .	1,152577
4	0,602060
c	9,939949
u'	9,505963
$3m+1$	0,746478
$I' =$ 6,229 . . .	0,794450

16	1,204120
cu	9,721972
$m'-1$	9,781037
$m+1$	0,402433
$.m$	$\bar{9}$,816446
$K =$ 8,434	0,926008
8	0,903090
cu'	9,445912
$m+1$	0,402433
$.m$	$\bar{9}$,816446
$K' =$ 3,697 . . .	0,567881
8	0,903090
c	9,939949
$2.u$	9,564046
$2.(m'-1)$	9,562074
$3m+2$	0,818094
$.m$	$\bar{9}$,816446
$L =$ 4,015	0,603699
8	0,903090
cu	9,721972
u'	9,505963
$m'-1$	9,781037
$3m+2$	0,818094
$.m$	$\bar{9}$,816446
$L' =$ 3,521	0,546602

$$\frac{2{,}542}{a''^2} - \frac{5{,}066}{a''} + 2{,}565 = 0$$

$A =$	16,224
$C =$	4,024
$B' =$	3,734
$K =$	8,434
$L =$	4,015
	36,431
$B =$	14,116
$A' =$	4,5664
$C' =$	0,9970
$I =$	14,2094
	− 33,8868
$M =$	2,5422
$3B' =$	11,202
$D' =$	8,960
$I' =$	6,229
	26,391
$3A' =$	13,6992
$3C =$	2,991
$E' =$	5,007
$K' =$	3,697
$L' =$	3,521
	− 28,9152
$N =$	− 2,5242

$A =$	16,224
$C =$	4,024
$B' =$	3,734
$D' =$	8,960
	32,942
$B =$	14,116
$A' =$	4,5664
$C' =$	0,997
$E' =$	5,007
$F' =$	5,6904
	− 30,3768
$I' =$	2.5652

PARS II.

$.p =$	2,542 . . .	$\bar{9}$,594825
$q =$	− 5,066 . . .	0,704665
$r =$	2,565 . . .	0,409087
$q' =$	− 1,993 . . .	0,299490
$r' =$	1,009 . . .	0,003912
$q'^2 =$	3,971 . . .	0,598980
$\frac{1}{4}q'^2 =$	0,9927	
	− 0,0163	
$-\frac{1}{2}q' =$	0,9965	

$1:a'' =$	0,9965 . .	9,998477
$-u =$	− 0,6054 . .	9,782023
$-u:a'' =$	− 0,6033 . .	9,780500
$1:a' =$	− 1,209 . .	0,082426
$2(m-1) =$	1,052 . .	0,022016
$1:h'' =$	1,048 . .	0,020493
$2(m'-1) =$	1,208 . .	0,082067
$1:h' =$	− 1,461 . .	0,164493
$1:h =$	1,052	
$=$	2,100	
$1:H =$	0,639	

$1:H$		9,805501
$.1:h$		$\bar{9}$,977984
$.1:h'$		$\bar{9}$,835507
$.1:h''$		$\bar{9}$,979507
$.1:a''$		$\bar{0}$,001523
$.1:a'$		$\bar{9}$,917574
$h =$	0,6074 . .	9,783485
$h' =$	0,4376 . .	9,641008
$h'' =$	0,6096 . .	9,785008
$a'' =$	0,6413 . .	9,807024
$a' =$	− 0,5285 . .	9,723075
$a =$	0,639	
$H =$	1	

76. Pri-

76. Prima linea columnæ 1 partis I habet valorem $u' = \frac{1}{H}$, qui juxta numerum $\overline{38}$ est duplus valoris $\frac{1}{H}$ inventi hìc num. 34, ubi is in lin. 5 erat $= 0,1603$: linea 2, & 3 habent valores A, B, C, A' eruendos juxta num. $\overline{38}$ e valoribus tabulæ numeri 26. Habetur A multiplicando illius valorem $A = 2,028$ per 8: B multiplicando illius $B = 3,529$ per 4: C multiplicando illius $C = 2,012$ per 2: A' multiplicando illius $A' = 0,5708$ per 8. Sequentes 4 lineæ exhibent novum B' ex illo veteri ducto in $4u$. Logarithmi 4, & u eruuntur ex lin. 16, & 3 columnæ 2 illius tabulæ, & logarithmus veteris B' ex lin. 16 columnæ 3 illius. Succedunt lineæ 4 pro novo $C' = 2u'C'$: log. 2 est dimidium log. 4 adhibiti in lin. 4, 2log. u habetur in lin. 14 columnæ 3 illius tabulæ, log. veteris C' in linea 4 columnæ 4. Linea 12 hujus columnæ habet novum D', qui est valor veteris eruti e lin. 8 columnæ 4 illius $= 1,120$ ductus in 8. Tres lineæ sequentes sunt pro novo $E' = 4uE'$. Pro hoc log. $4u$ obtinetur addendo simul log. 4, & log. u lineæ 4, & 5 hujus columnæ, & log. veteris E' habetur in lin. 14 columnæ 4 illius tabulæ prioris. Succedit F', qui valor invenitur multiplicando per 8 valorem veteris F', qui in linea ultima ejusdem columnæ 4 est $= 0,7113$.

77. Post valorem F' habetur $I = 8cu(m'-1)(3m+1)$. Log. 8 habetur triplicando log. 2 lineæ 8 hujus columnæ, log. c eruitur ex lin. 3 columnæ 3 illius, log. u, $m'-1$, $3m+1$ ex lin. 3, 5, 12 columnæ 2 illius ejusdem. Pro $I' = 4cu'(3m+1)$ habentur omnia in hac ipsa columna, nimirum pro 4, c, u', $3m+1$ in lin. 4, 18, 1, 21. In 2 columna pro $K = \frac{16cu(m'-1)(m+1)}{m}$ habetur log. 16 duplicando log. 4 lineæ 4 columnæ 1 hujus tabulæ, log. cu addendo log. c, & log. u lin. 18, & 19 ipsius: log. $(m'-1)$, & log. $(m+1)$ habentur in lin. 5, & 6 columnæ 2 veteris, & compl. log. m in lin. 9 columnæ 3 ejusdem. Pro $K' = \frac{8cu'(m+1)}{m}$ habetur log. 8 hìc in lin. 17 columnæ 1, log. cu' efficitur addendo log. c,

& log.

& log.u', qui habentur in lineis 24, & 25 ejusdem, log.$(m+1)$ habetur in hac columna 2 lin.4. Pro $L = \frac{8cu^2(m'-1)^2(3m+2)}{m}$ habetur log.8 hic in lin.7 hujus columnæ 2, log.c hic in lin.18 col.1, 2 log.u in lin.9 col.1, 2 log.$(m'-1)$ obtinetur duplicando log.$(m-1)$ lineæ 3 hujus columnæ 2, compl.log.m habetur hic itidem in lin.5. Pro $L' = \frac{8cuu'(m'-1)(3m+2)}{m}$ habetur log.8 hic in lin.7, log.cu in lin.2, log.u' in lin.1 col.1, log.$(m'-1)$ in lin.3 col.2, log.$(3m+2)$ in illa tabula veteri lin.14 col.2.

78. Valores inventi adhibentur in columna 3, & 4 ad determinandos numeros pertinentes ad tres terminos æquationis. Priores 5 lineæ habent terminos positivos valoris M, linea 6 eorum summam, sequentes 4 sunt termini ipsius negativi, in lin.11 habetur eorum summa: subtrahendo hanc summam a priore fit M. Consequuntur tres termini positivi valoris N cum ipsorum summa, tum 5 negativi cum summa ipsorum: prior summa subtracta a posteriore exhibet valorem N. In columna 4 habentur 4 termini positivi valoris P cum eorum summa, tum 5 negativi cum summa ipsorum: summa posterior subtracta a priore relinquit P. In fine secundæ columnæ habetur æquatio, in qua coefficiens primi termini est $M = 2,542$, omissâ postremâ notâ 2, coefficiens secundi est $N - M = -2,524 - 2,542 = -5,066$, omissâ itidem postremâ notâ, quæ esset 4; postremus terminus est $P = 2,565$.

79. Resolutio æquationis habetur in 1 columna partis II, eodem modo, quo num.73 usque ad valorem inclusum radicali. Sunt nimirum p, q, r numeri terminorum æquationis, $q' = \frac{q}{p}$, $r' = \frac{r}{p}$, & extrahenda est radix ex valore $\frac{1}{4}q'^2 - r'$. Valor $\frac{1}{4}q'^2$ habetur in lin.7, qui cum sit minor valore r' lineæ 5, remanet in lin.8 valor negativus $-0,0163$. Hinc radix evadit imaginaria. Sed cum sit exiguus, poterit is terminus negligi, & relinquitur error figuræ sphæricæ minimus (Cap.II num.86), si non

prorsus destructus ab æquatione, ibi, ubi $\frac{1}{a''} = -\frac{1}{2}q' = 0,9965$. Jam si æquatio haberet radices reales; error non esset prorsus destructus, ob terminos ordinum inferiorum neglectos in calculo algebraico, quod efficit, ut is terminus etiam cum evaserit exiguus, negligi possit.

80. Assumpto pro $\frac{1}{a''}$ eo valore in prima linea columnæ 2, & adscripto ipsi suo logarithmo, apponitur in lin. 2 valor u erutus e lin. 3 columnæ 1 tabulæ numeri 26 cum suo logarithmo. Inde habetur in tertia valor $-\frac{u}{a''}$: summa numerorum lin. 2, & 3 exhibet valorem $\frac{1}{a}$ in lin. 4, assumpto 1,209 pro 1,2087. Est $\frac{1}{b''} = \frac{2(m-1)}{a''}$: pro ipsius determinatione eruitur valor $2(m-1)$ e tabula numeri 26 duplicando valorem $m-1$ lineæ 4 columnæ 1. Is habetur hic in lin. 5 cum suo logarithmo. Summa hujus, & logarithmi lineæ 1 exhibet in lin. 6 $\log. \frac{2(m-1)}{a''} = \log. \frac{1}{b''}$, adeoque valorem ipsum. Simili modo pro $\frac{1}{b'} = \frac{2(m'-1)}{a'}$ eruitur e lin. 5 col. 1 tabulæ numeri 26 valor $2(m'-1)$, qui habetur hic in lin. 7 cum suo logarithmo: ejus summa cum $\log. \frac{1}{a}$ lineæ 4, exhibet in lin. 8 logarithmum valoris $\frac{1}{b'}$, & ipsum valorem, qui habetur ibidem. In lin. 9 habetur valor $\frac{1}{b}$, qui est idem ac $2(m-1)$ lineæ 5. In lin. 10 habetur summa valorum $\frac{1}{b''}$, & $\frac{1}{b}$ linearum 6, & 9: ab eo numero subtrahitur valor negativus $\frac{1}{b'}$ lineæ 8 ad habendum in lin. 11 valorem $\frac{1}{H} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{b''}$.

81. Postrema columna reducit more solito valores quæsitos ad unitatem $= H$. Prima linea habet $\log. \frac{1}{H} = \log. 0,639$ eruendum e tabula logarithmorum: sequentes 5 habent complementa logarithmorum, qui habentur in columna 2 in lineis 5, 8, 6, 1, 4. Eo-

Eorum summæ cum prima linea exhibent logarithmos valorum h, h', h'', a'', a'. Valor a est idem 0,639, ac $\frac{1}{H}$; quia num. $\overline{37}$ valor $\frac{1}{a}$ erat $= 1$.

82. Valores a, a', a'' hìc obvenerunt quam proxime iidem, ac in casu 1 num. *62*, & fere æquales inter se: nimirum radii sphæricitatum lentis primæ, & tertiæ fere æquales inter se *64* partium earum, quarum distantia foci communis H continet 100, & radius sphæricitatis lentis secundæ e flint partium 53. Hæc combinatio est omnium commodissima, cum omnes lentes sint isosceliæ, & pro isosceliis multo facilius per focos directos, & reflexos deprehendi possit, an revera superficiebus sphæricis inductæ sint figuræ, quas exhibuerat calculus, adhuc autem commodior in hoc vitri genere, in quo ea requirit binas formas tantummodo, alteram pro omnibus superficiebus convexis, alteram pro binis concavis. Accedit, quod æqualitas lentium extremarum permittit in hoc casu hujus vitri inversionem objectivi compositi factam ita, ut quæ lens erat prima, evadat tertia, quod est sane ingens commodum. Si posset haberi ingens copia vitrorum ejus duplicis generis, regula tradenda artificibus opticis esset admodum simplex. Sed diversa vitrorum genera diversas combinationes requirunt.

83. Quo pacto mihi se obtulerit reductio hujus æquationis ad gradum secundum, fuse exposui in adnotatione ad numerum *69* capitis II, & numeris 58, *59*, *60* hujus. Ibidem exposui, quo pacto æquatio gradus tertii, quæ primo sese obtulit, præter binas radices hìc inventas, exhibeat tertiam, quæ inducit lentes extremas æquales, & contrarias, ac mediam utrinque planam. Innui etiam, haberi & aliam combinationem, quæ problemati satisfaciat, in qua nimirum omnes sex superficies sint planæ, quæ tamen exhiberi non potuit ab ea æquatione tractata more solito idcirco, quod ibi valor a' evadit infinitus, & nos ad eruendam æquationem ipsum feceramus $= 1$. Quo pacto etiam ipsa inde eruatur, patebit in supplemento sequenti.

SUPPLEMENTA

Ad Opusculum Secundum.

SUPPLEMENTUM I.

Alia evolutio formularum pro objectivo acromatico composito e tribus lentibus.

1. MEAS formulas hujusce Opusculi communicaveram cum admodum Reverendo Patre Gaudiberto e Dominicanorum familia acris ingenii viro, & tam in formulis evolvendis, quam in elaborandis per se ipsum telèscopiis etiam acromaticis apprime industrio, vitris ad accuratas mensuras egregie tornatis, ac perpolitis, & tubis ipsis metallicis nitidissime perfectis. Is eas ad trutinam revocatas numeris etiam applicatis ad eas, quæ pertinent ad objectivum triplex, immutatas nonnihil, contulit cum meis, invento ubique consensu præter casum secundum, in cujus formulis primo ad ipsum transmissis error mihi irrepserat in binis signis posito negativo pro positivo, & viceversa. Eo correcto habitus est consensus etiam ibi. Ejus methodus licet finales formulas a me propositas in casibus, quos penitus evolvi, reddat minus expeditas pro applicatione numerorum; est tamen utilissima, quia reddit multo faciliorem applicationem formulæ generalis ad casus particulares, & multo magis accommodatam ad usum eorum, qui sunt aliquanto minus exercitati in evolvendis algebraicis formulis per substitutiones valorum minus simplicium. Is eam ad me transmisit humanissime cum evolutione casuum diversorum septem, quorum ego numeris etiam applicatis evolveram tantummodo tres, ac adjecit applicationem numerorum pertinentium ad ea vitrorum genera, quæ tum ipse adhibebat, pro iis casibus omnibus.

2. Ex-

2. Exhibebo hic, ipso permittente, eam methodum, servando ordinem eundem, adjectis iis, quæ conducunt ad intimiorem cognitionem ipsius ordinis admodum opportuni operationum singularum: addam applicationes ad casus particulares, ubi & formulas algebraicas æquationum prodeuntium in singulis casibus, & valores numericos tam æquationum ipsarum, & radicum, quam radiorum sphæricitatis inde provenientium retinebo, ut inveni in ejus schedis ad me transmissis, cum ejus calculis fidam multo magis, quam meis; atque id eo magis, quod nonnullos ex iis, etiam ipse repetitos inveni accuratissimos. Subjiciam considerationes nonnullas pertinentes ad plures ex iis applicationibus, ac comparationem cum meis, ut & ad ipsam æquationem generalem, ad quam eum deduxit ea methodus, & usum ipsius ampliorem, quæ quidem omnia digeram divisa in plures paragraphos.

§. I.

De prima unitate assumpta ad faciliorem calculum, & forma secundæ, quæ æquatur distantiæ focali objectivi compositi, utrâque communi casibus omnibus.

3. IPSE etiam ad reddendum faciliorem calculum assumit initio unitatem arbitrariam, respectu cujus inventis valoribus fractionum $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{a''}, \frac{1}{b''}, \frac{1}{H}$, ubi a, b, a', b', a'', b'', sunt radii sphæricitatum, H distantia focalis lentis compositæ, ut apud me: dividit deinde, ut & ego præstiteram, valorem postremæ fractionis $\frac{1}{H}$ per valores præcedentium ad inveniendos valores eorum radiorum relate ad unitatem æqualem ipsi distantiæ focali H. Sed pro ea unitate prima assumit valorem analyticum communem casibus omnibus, ad quem reducitur is, quem ego adhibueram pro solo casu primo, nimirum ponit $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = 1$, ubi, ut ubique apud me, est $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$,

$\frac{1}{f''}$

$\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$. Inde autem eruitur itidem pro omnibus casibus $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$, & communis pro omnibus derivatur valor $\frac{1}{f'} = -u$, & $\frac{1}{H} = m - 1 - u(m' - 1)$, ut mox videbimus, quos valores ego habueram communes omnibus casibus objectivi compositi e duabus lentibus, sed remanserant iidem in solo primo casu compositi e ternis. Hæc extensio hujus unitatis ad omnes casus commodam reddidit applicationem valorum ad formulam æquationis generalis corrigentis simul utrumque errorem tam refrangibilitatis, quam sphæricitatis, & hujus formulæ ad casus particulares.

4. Ego generaliter adhibueram pro objectivo composito e binis lentibus unitatem $= f$, qui valor ibi erat admodum commodus: nam inde eruebatur ex prima formula numeri 16 capitis II hujus Opusculi valor $\frac{1}{f'} = -\frac{u}{f} = -u$, ubi u est $= \frac{dm}{dm'}$, qui cum binis m, m' pertinet ad qualitates vitrorum datas per numeros; & ii tres sunt unica basis omnium calculorum. Eum ejus unitatis valorem retinui pro tribus lentibus in secundo ex iis tribus casibus, quos prorsus evolvi, ac pro primo posueram $f = 2$, pro tertio $= \frac{1}{2}$. Verum sola prima ex hisce tribus positionibus mihi exhibuit eam commodam expressionem valoris $\frac{1}{f'} = -u$, & $\frac{1}{H} = m - 1 - u(m' - 1)$, quo valore semel invento relate ad primam illam unitatem, & appellato u', valores omnes a, b, a', b', a'', b'' reducuntur ad unitatem æqualem ipsi distantiæ focali H, diviso hoc valore u' communi per illas fractiones $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, &c. indicatas hic num. 3. Nam facto $f = 2$, habetur $\frac{1}{f} = \frac{1}{2}$, adeoque cum, ob tertiam lentem æqualem primæ in eo casu, sit etiam $\frac{1}{f''} = \frac{1}{2}$, evadit ibi $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = 1$.

5. Binæ habentur formulæ in eo meo numero 16, quæ factæ $= 0$ corrigunt prima quidem errorem refrangibilitatis, secunda vero

ro errorem sphæricitatis. Illa prior habet $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} = 0$, adeoque facto generaliter $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = 1$, evadit $dm + \frac{dm'}{f'} = 0$, adeoque $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} = -u$, & cum ex meo num. 13 ejusdem capitis sit $\frac{1}{H} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$, & ob speciem vitri eandem pro lentibus extremis sit $m'' = m$, evadit is valor $= m - 1 + \frac{m'-1}{f'} = m - 1 - u(m'-1)$, quod commodum amissum in positionibus reliquorum casuum complicatiorem mihi reddidit eorum evolutionem.

§. II.

Reductio æquationis generalis per opportunas substitutiones.

6. FORMULA II ejusdem numeri 16 capitis secundi facta $= 0$ exhibet æquationem pro correctione erroris sphæricitatis: in eam inducitur correctio diversæ refrangibilitatis per substitutionem valoris $\frac{1}{f'} = -u$ (num. 5): ea ibi erat

$$c\left(\frac{m^2}{f^3} - \frac{2m+1}{af^2} + \frac{m+2}{ma^2f}\right)$$
$$\frac{m'^2}{f'^3} - \frac{2m'+1}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{m'a'^2f'} + \frac{3m'+1}{p'f'^2} - \frac{4(m'+1)}{m'a'p'f'} + \frac{3m'+2}{m'p'^2f'}$$
$$c\left(\frac{m^2}{f''^3} - \frac{2m+1}{a''f''^2} + \frac{m+2}{ma''^2f''} + \frac{3m+1}{p''f''^2} - \frac{4(m+1)}{ma''p''f''} + \frac{3m+2}{mp''^2f''}\right)$$

existente $c = \frac{m-1}{m'-1}$, $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{p''} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$.

7. Verum præstat incipere ab eliminatione valorum $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ per substitutionem, quæ reducet ipsam formulam ad sequentem

cm^2

$$\frac{cm^2}{f^3} - \frac{c(2m+1)}{af^2} + \frac{c(m+2)}{ma^2f} + \frac{m'^2}{f'^3} - \frac{2m'+1}{a'f'^2} + \frac{m'+2}{m'a'^2f'} + \frac{(3m'+1)(m-1)}{ff'^2}$$
$$- \frac{4(m'+1)(m-1)}{m'a'ff'} + \frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'f^2f'} + \frac{cm^2}{f''^3} - \frac{c(2m+1)}{a''f''^2} + \frac{c(m+2)}{ma''^2f''}$$
$$+ \frac{c(3m+1)(m-1)}{ff''^2} + \frac{c(3m+1)(m'-1)}{f'f''^2} - \frac{4c(m+1)(m-1)}{ma''ff''} - \frac{4c(m+1)(m'-1)}{ma''f'f''}$$
$$+ \frac{c(3m+2)(m-1)^2}{mf^2f''} + \frac{2c(3m+2)(m-1)(m'-1)}{mff'f''} + \frac{c(3m+2)(m'-1)^2}{mf'^2f''}$$

8. Quo facilius fieri possint substitutiones ulteriores, ponantur pro singulis e superioribus valoribus datis per m, m', & numeros singulæ litteræ majusculæ suo ordine, omissis decimo, undecimo, & duodecimo, qui cum sint iidem, ac tres primi, debent designari iisdem tribus primis litteris A, B, C. Sic habentur

$$A = cm^2 \; \ldots\ldots \; B = -c(2m+1) \; \ldots \; C = \frac{c(m+2)}{m}$$

$$D = m'^2 \; \ldots\ldots \; E = -(2m'+1) \; \ldots \; F = \frac{m'+2}{m'}.$$

$$G = (3m'+1)(m-1) \; \ldots\ldots\ldots \; H = \frac{4(m'+1)(m-1)}{m'}$$
$$I = \frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'} \; \ldots\ldots\ldots \; K = c(3m+1)(m-1)$$

$$L = c(3m+1)(m'-1) \; \ldots\ldots\ldots \; M = -\frac{4c(m+1)(m-1)}{m}$$

$$N = -\frac{4c(m+1)(m'-1)}{m} \; \ldots\ldots \; O = \frac{c(3m+2)(m-1)^2}{m}$$

$$P = \frac{2c(3m+2)(m-1)(m'-1)}{m} \; \ldots \; Q = \frac{c(3m+2)(m'-1)^2}{m}.$$

Hinc æquatio proposita pro correctione sphæricitatis evadit

$$\frac{A}{f^3} + \frac{B}{af^2} + \frac{C}{a^2f} + \frac{D}{f'^3} + \frac{E}{a'f'^2} + \frac{F}{a'^2f'} + \frac{G}{ff'^2} + \frac{H}{a'ff'} + \frac{I}{f^2f'}$$
$$+ \frac{A}{f''^3} + \frac{B}{a''f''^2} + \frac{C}{a''^2f''} + \frac{K}{ff''^2} + \frac{L}{f'f''^2} + \frac{M}{a''ff''} + \frac{N}{a''f'f''}$$
$$+ \frac{O}{f^2f''} + \frac{P}{ff'f''} + \frac{Q}{f'^2f''} = 0.$$

9. Hoc

9. Hoc pacto ob duplicem valorem $\frac{1}{p''}$ bis repetitum, & $\frac{1}{p'''}$ triplicem semel habitum accesserunt termini quatuor, ac e quindecim evaserunt 19. Porro facile eliminantur etiam valores $\frac{1}{f'} = -u$, & $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$ per substitutionem ad obtinendam æquationem generalem, quæ corrigat utrumque simul errorem tam refrangibilitatis, quam sphæricitatis. Ea reducetur ad quatuor valores indeterminatos $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ relatos ad unitatem $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$, sive $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$. Ii valores reducuntur deinde ad unicum per tres determinationes arbitrarias, quæ distinguunt casus diversos. Habito hoc per æquationem, obtinentur valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$ relati ad eandem illam unitatem arbitrariam, & reducuntur ad unitatem $=$ H, diviso valore u' per valores earum fractionum inde erutos.

10. In ejusmodi substitutione soli termini, qui habent f'', dividuntur in plures ob valorem $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$ continentem terminos binos: nimirum singuli ex illis, qui habent $\frac{1}{f''}$, duplicantur, sunt autem sex: tres, qui habent $\frac{1}{f''^2}$, triplicantur: unicus habens $\frac{1}{f''^3}$ quadruplicatur; adeoque numerus terminorum, qui erant 19, augetur per novos $6+6+3=15$, & evadit $=34$: sed duo ex his se mutuo elidunt, nimirum $\frac{A}{f^3}$, & $-\frac{A}{f^3}$, qui provenit ex termino $\frac{A}{f''^3}$ exhibente $A - \frac{3A}{f} + \frac{3A}{f^2} - \frac{A}{f^3}$, adeoque evadunt 32. Ipsi rite collecti exhibent æquationem sequentem

$$\frac{K-O}{f^3} + \frac{3A+O-2K+(P-I-L)u}{f^2} + \frac{K-3A+(2L-P)u+(G-Q)u^2}{f}$$

$$+ \frac{B}{af^2} + \frac{C}{a^2f} - \frac{Hu}{a'f} + \frac{Eu^2}{a'} - \frac{Fu}{a'^2} + \frac{B-M}{a''f^2} + \frac{M-2B+Nu}{a''f}$$

$$+\frac{B-Nu}{a''}-\frac{C}{a''^2 f}+\frac{C}{a''^2}+A-Lu+Qu^2-Du^3=0.$$

11. Nova denominatio valorum numericorum, qui occurrunt per litteras A', B', C', &c., reddit formulam hujus æquationis generalis magis tractabilem, pro applicatione ad casus particulares. Hinc is posuit

$A'=K-O$; $B'=3A+O-2K+(P-I-L)u$; $C'=K-3A+(2L-P)u+(G-Q)u^2$; $D'=B$; $E'=C$; $F'=-Hu$; $G'=Eu^2$; $H'=-Fu$; $K'=B-M$; $L'=M-2B+Nu$; $M'=B-Nu$; $N'=A-Lu+Qu^2-Du^3$.

Iis valoribus numericis semel inventis per m, m', u, obtinetur æquatio generalis redacta ad formam sequentem

$$\frac{A'}{f^3}+\frac{B'}{f^2}+\frac{C'}{f}+\frac{D'}{af^2}+\frac{E'}{a^2 f}+\frac{F'}{a'f}+\frac{G'}{a'}+\frac{H'}{a'^2}+\frac{K'}{a''f^2}$$
$$+\frac{L'}{a''f}+\frac{M'}{a''}+\frac{E'}{a''^2}-\frac{E'}{a''^2 f}+N'=0.$$

§. III.

Applicatio formulæ generalis ad casus particulares cum exemplis numericis.

12. PROPONENTUR hic applicationes ad septem casus, quos innuimus num. 1, cum exemplis numericis pertinentibus ad bina vitra, quorum alterum flint, alterum commune. Pro iis Gaudibertus invenerat valores sequentes $m=1,527$; $m'=1,575$; $u=\frac{dm}{dm'}=\frac{24}{37}=0,6486$. Hisce valoribus adhibitis computavit binas tabulas, quarum prior continet valores numericos respondentes algebraicis simplicioribus num. 8, posterior complicatioribus num. 11. In hisce posterioribus non adhibuit litteram I'; licet in prioribus usus esset litterâ I: id primo aspectu posset cuipiam injicere suspicionem de aliquo termino omisso per errorem vel in primo calculo vel in describendo, vel in impressione: sed nihil deest, nil id officit, cum usus litterarum in denominationibus sit liber.

liber. Ex iis tabulis assumendi sunt valores pro inveniendis coefficientibus, & postremis terminis singularum æquationum, qui hìc occurrent in singulis casibus. Idcirco eas tabulas proponam in fine hujus Opusculi ita digestas, ut is eas ad me transmisit. Porro de calculis numericis ab ipso diligentissime subductis, & repetitis tam pro tabulis ipsis, quam pro numeris desumptis inde ad eruendas æquationes, & ex æquationibus deducendos valores sphæricitatum, nihil timeri debet, nec vero de errore impressionis; cum hoc potissimum in genere summa in corrigendis typis diligentia sit adhibita. Verum etiam siquid in iis irrepsisset, nihil id sane obesset hìc, ubi exempla tantummodo proferuntur. Accuratio maxima necessaria est in formulis finalibus, prò quibus adhuc major diligentia adhibita est: nam pro singulis vitrorum qualitatibus omnes calculi numerici dependenter ab ipsis formulis sunt iterum instituendi, adhibendo novos valores m, m', u. Formulas autem esse omnino accuratas, evincit ipse consensus valorum numericorum, qui profluxerunt iidem ex applicatione eorundem valorum fundamentalium m, m', u, ad ipsas exigentes progressum calculi numerici admodum diversi.

13. In vertice tabulæ I habentur hi valores m, m', u, ac valor $c = \frac{m-1}{m'-1} = 0,9165$ derivatus e binis prioribus: in fine tabulæ II habetur valor $u' = m-1 - u(m'-1) = 0,154$ derivatus ex iisdem. Calculus numericus ad eas perficiendas est admodum prolixus, potissimum pro secunda, pro qua desumendi sunt e prima valores plures; tum alios ex ipsis, & vero etiam summam plurium oportet multiplicare per u, u^2, u^3, quod exigit præter transitum a numeris ad logarithmos, & regressum a logarithmis ad numeros in prima, alios ejusmodi transitus, & regressus adhuc plures pro secunda. Verum hæ tabulæ semel computatæ utilissimæ esse debent, ubi agitur de calculo instituendo pro multis casibus; nam inveniuntur in secunda numeri omnes necessarii pro æquationibus singulorum. Præstabit autem plurimos evolvere, ubi Chymica obtulerit constantem compositionem vitrorum bene homogeneorum, quorum haberi possit satis magna co-

pia, saltem duplicis speciei constanter ejusdem, pro quibus deductæ combinationes respondentes singulis casibus possint inter se conferri ad seligendas eas, quæ videbuntur maxime idoneæ, quæ ipsæ, si objectiva composita elaborata exhibuerint telescopia satis perfecta, adhiberi possint vel perpetuo, vel saltem satis diu.

14. Sed jam progrediemur ad evolvendos casus singulos: primo loco ponemus reductionem singulorum e valoribus $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$ ad valores cognitos, & eum e tribus postremis, qui fuerit electus pro valore æquationis incognito x; ac ex iis ipsis deducemus etiam expressionem valorum $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{b''}$, pro qua deductione habendi semper sunt ob oculos valores $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, & $\frac{1}{f'} = - u$, $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$: in casu autem isoscelismi habebitur semper $\frac{1}{a} = - \frac{1}{b}$, adeoque $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, & $\frac{1}{a} = - \frac{1}{b} = \frac{1}{2f}$, ac eodem pacto tum fient $\frac{1}{f'} = \frac{2}{a'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{2}{a''}$, & $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'}$, $\frac{1}{a''} = \frac{1}{2f''}$. Tum, substitutis valoribus inventis, eruemus æquationem expressam terminis algebraicis: deinde proponemus æquationem ipsam redactam ad solum valorem x, & valores numericos erutos ex iis, qui in tabula II respondent valoribus ipsius algebraicis, cum radicibus inde erutis ab ipso Gaudiberto: succedent demum valores numerici radiorum sphæricitatis a, b, a', b', a'', b'' deducti ab eodem ex valore u' diviso per valores fractionum $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ &c., quæ divisio eos exhibet relatos ad unitatem æqualem distantiæ focali lentis totius. Ii radii sphæricitatis habebuntur deinde in pedibus, vel aliis mensuris datis multiplicando numeros ita inventos per numerum earum mensurarum, quem sibi quisque proposuerit pro distantia focali objectivi requisiti.

15. Animadversiones pertinentes ad plures ex iis casibus, comparationem ejus evolutionis cum mea, & considerationes nonnullas pro ulteriore usu æquationis generalis, proponemus in paragraphis sequentibus.

CA-

CASUS I.

Lentes extremæ isosceliæ, & æquales.

16. Erit ob æqualitatem lentium extremarum $\frac{1}{f} = \frac{1}{f''}$, adeoque (num. 5) $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = \frac{2}{f} = 1$, & $\frac{1}{f} = \frac{1}{2}$: ob isoscelismum $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{4}$: ob eandem æqualitatem lentium extremarum $\frac{1}{a''} = \frac{1}{a} = \frac{1}{4}$.

17. Assumpto $\frac{1}{a'}$ pro x, & substitutis hisce valoribus pro $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a''}$ in æquatione generali numeri 11, habebitur $H'x^2 + (G' + \frac{1}{2}F')x + N' + \frac{1}{2}C' + \frac{1}{4}(B' + M') + \frac{1}{8}(A' + L') + \frac{1}{16}(D' + E' + K') = 0$.

18. Fractiones, per quas dividi debet valor u', erunt $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{a''} = -\frac{1}{b''} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{a'} = x$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'} = x + u$.

19. Æquatio numeris substitutis erit $1,4723x^2 + 0,6283x + 0,0658 = 0$, quæ exhibet $x = 0,2134 \pm 0,0289$, & accepto valore radicis positivo, $x = -0,2423$. Valores autem relati ad unitatem $= H$, erunt

$$a = -b = a'' = -b'' = 4u' = 0,616$$

$$a' = \frac{u'}{x} = -0,6356$$

$$b' = \frac{u'}{x+u} = 0,3790.$$

CASUS II.

Primæ binæ lentes isosceliæ cum sphæricitatibus contrariis æqualibus.

20. Erit ob curvaturas æquales, & contrarias $\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = u$: ob æqualitatem, & isoscelismum $\frac{1}{a} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'} = -\frac{1}{2}u$.

21. As-

21. Assumpto $\frac{1}{a''}$ pro x, & substitutis hisce valoribus in eadem æquatione generali, habebitur $(E' - E'u)x^2 + (M' + L'u + K'u^2)x + N' + (C' - \frac{1}{2}G')u + (B' + \frac{1}{4}H' - \frac{1}{2}F')u^2 + (A' + \frac{1}{2}D' + \frac{1}{4}E')u^3 = 0$.

22. Fractiones, per quas dividi debet valor u', erunt $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a''} = x$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} + \frac{1}{f} - 1 = x + u - 1$.

23. Æquatio numeris substitutis erit $0{,}7438x^2 - 0{,}3924x + 0{,}0594 = 0$; sed ejus radices evadunt imaginariæ, adeoque hæc combinatio in hoc vitrorum genere locum habere non potest, nisi contemnatur valor radicis imaginariæ, ad habendam reductionem erroris ad suum minimum pro correctione juxta id, quod pro casu meo tertio præstiti capite IV numer. 79 hujus Opusculi. Valor x eruitur $= 0{,}2639 \pm \sqrt{-(0{,}0103)}$. Assumptâ pro x sola parte rationali haberentur

$$a = -b = -a' = b' = \frac{2u'}{u} = 0{,}4748$$

$$a'' = \frac{u'}{x} = 0{,}3514$$

$$b'' = \frac{u'}{x + u - 1} = -0{,}4383$$

CASUS III.

Postremæ binæ lentes isosceliæ cum sphæricitatibus æqualibus.

24. Erit ob curvaturas æquales, & contrarias $\frac{1}{f''} = -\frac{1}{f'} = u$, adeoque $\frac{1}{f} = 1 - \frac{1}{f''} = 1 - u$: ob isoscelismum $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'} = -\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a''} = \frac{1}{2f''} = \frac{1}{2}u$.

25. Assumpto $\frac{1}{a}$ pro x, & substitutis hisce valoribus in eadem æquatione generali, ac posito præterea $\frac{1}{f} = 1 - u = q$, habe-

habebitur $E'qx^2 + D'q^2x + N' + \frac{1}{2}u(M' - G') + \frac{1}{4}u^2(E' + H') + \frac{1}{2}qu(L' - F') - \frac{1}{4}qu^2E' + \frac{1}{2}q^2uK' + A'q^3 + B'q^2 + C'q = 0$.

26. Fractiones, per quas debet dividi valor u', erunt $\frac{1}{a} = x$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = x - q$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$.

27. Æquatio numeris substitutis erit $0,7478x^2 - 0,4587x + 0,0696 = 0$, quæ exhibet $x = 0,3083 \pm 0,0391$, & assumpto valore radicis negativo, $x = 0,2692$. Valores autem relati ad unitatem $=$ H erunt

$$a = \frac{u'}{x} = 0,5721$$
$$b = \frac{u'}{x + u - 1} = -1,8744$$
$$a' = -b' = -a'' = b'' = -0,4748.$$

28. Quod si assumatur valor radicis positivus, obtinetur $x = 0,3474$, & inde $a = 0,4433$, $b = -38,89$, $a' = -b'$, quæ superficies posset etiam fieri plana ob tantam radii sphæricitatis longitudinem: reliqui radii, cum non pendeant a valore x, remanent adhuc iidem.

CASUS IV.

Omnes tres lentes isosceliæ.

29. Isoscelismus exhibebit $\frac{1}{f} = \frac{2}{a}$, $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'} = -\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a''} = \frac{1}{2f''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2f}$ (ob $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$) $= \frac{1}{2} - \frac{1}{a}$.

30. Assumpto $\frac{1}{a}$ pro x, & substitutis hisce valoribus in æquatione generali, habebitur $(8A' + 4D' - 4K')x^3 + (4B' + 3E' - 2L' + 2K')x^2 + (2C' - \frac{3}{2}E' + L' - M' - F'u)x + N' + \frac{1}{4}E' + \frac{1}{2}M' + \frac{1}{4}H'u^2 - \frac{1}{2}G'u = 0$.

31. Fractiones, per quas debet dividi valor u', erunt $\frac{1}{a} = x$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a''} = \frac{1}{2} - x = \frac{1 - 2x}{2}$.

32. Æ-

32. Æquatio numeris substitutis exhibuit coefficientem primi termini $= 0$: reliqui bini exhibuerunt $5,3433x^2 - 2,6673x + 0,3160 = 0$, quæ exhibet $x = 0,2496 \pm 0,0562$, & assumpto valore radicis negativo, $x = 0,1934$. Valores autem relati ad unitatem $=$ H erunt

$$a = - b = \frac{u'}{x} = 0,7963$$

$$a' = - b' = \frac{2u'}{u} = - 0,4748$$

$$a'' = - b'' = \frac{2u'}{1 - 2x} = 0,5023.$$

33. Quod si assumatur valor radicis positivus; obtinetur $x = 0,3058$, & inde $a = - b = 0,5036$, $a' = - b' = - 0,4748$, $a'' = - b'' = 0,7929$.

34. Videbimus infra (num. 49), non casu hìc accidisse, ut coefficiens primi termini evanesceret in hoc vitrorum genere, sed in quovis alio debere idem accidere, & proferemus ejus ipsius phænomeni causam. Idem autem accidet etiam in casu postremo ex hisce septem.

35. Illud autem notandum hìc censuit Gaudibertus ipse, alteram ex hisce binis combinationibus esse ad sensum inversam alterius ita, ut radii sphæricitatum abeundo in altera a postremo versus primum exhibeant fere eandem seriem, quam exhibent in altera abeundo a primo versus postremum; quod quidem accidit omnino commodum; quia sic licebit invertere ipsum objectivum ita, ut superficies, quæ erat prima, evadat postrema, & vice versa. Idem habetur in mea combinatione casus III, ut monui num. 82 cap. IV Opusc. II. Sed hìc id quidem pendet ab hisce individuis vitrorum generibus. In casu sequenti habetur idem commodum pro quocunque vitri genere, dummodo æquatio exhibeat radices reales, quæ offerant curvaturas non nimis magnas, quod quidem non licet in aliis.

CA-

CASUS V.

Lens secunda isoscelia, binæ extremæ æquales, sed collocatæ ordine inverso.

36. Isoscelismus lentis intermediæ exhibebit pariter $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'} = -\frac{1}{2}u$; æqualitas lentium extremarum $\frac{1}{f} = \frac{1}{f''} = \frac{1}{2}$: inversio addet $\frac{1}{a''} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a}$.

37. Assumpto $\frac{1}{a} = x$, & substitutis hisce valoribus in æquatione generali, habebitur $E'x^2 + (\frac{1}{4}D' - \frac{1}{2}E' - \frac{1}{4}K' - \frac{1}{2}L' - M')x + \frac{1}{8}(A' + E' + K') + \frac{1}{4}(B' + L') + \frac{1}{2}(C' + M') + N' + \frac{1}{4}H'u^2 - (\frac{1}{2}G' + \frac{1}{4}F')u = 0$.

38. Fractiones, per quas dividendus est valor u', erunt $\frac{1}{a} = -\frac{1}{b''} = x$, $\frac{1}{a''} = -\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2} - x = \frac{1-2x}{2}$, $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{b'} = -\frac{1}{2}u$.

39. Æquatio, numeris substitutis, erit $2,1169x^2 - 1,3904x + 0,1990 = 0$, quæ exhibet $x = 0,3284 \pm 0,1176$, & accepto valore radicis negativo, $x = 0,2108$: valores autem relati ad unitatem $= H$

$$a = -b'' = \frac{u'}{x} = 0,7306$$

$$a' = -b' = \frac{2u'}{u} = -0,4748$$

$$a'' = -b = \frac{2u'}{1-2x} = 0,5325.$$

CASUS VI.

Lens secunda isoscelia, binæ extremæ æquales, & collocatæ ordine directo.

40. Isoscelismus lentis intermediæ exhibebit hic etiam $\frac{1}{a'} =$

$-\frac{1}{2}u$, & æqualitas lentium extremarum $\frac{1}{f}=\frac{1}{2}$: positio directa addet $\frac{1}{a''}=\frac{1}{a}$.

41. Assumpto $\frac{1}{a}=x$, & substitutis hisce valoribus in æquatione generali, habebitur $E'x^2+(\frac{1}{4}(D'+K')+\frac{1}{2}L'+M')x$ $+\frac{1}{8}A'+\frac{1}{4}B'+\frac{1}{2}C'-(\frac{1}{4}F'+\frac{1}{2}G')u+\frac{1}{4}H'u^2+N'=0$.

42. Fractiones, per quas dividendus erit valor u', erunt $\frac{1}{a}=\frac{1}{a''}$ $=x$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{b''}=\frac{1}{a}-\frac{1}{f}=x-\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{2}$, $\frac{1}{a'}=-\frac{1}{b'}=$ $-\frac{1}{2}u$.

43. Æquatio, numeris substitutis, erit $2,1169x^2-1,5258x$ $+0,2323=0$, quæ exhibet $x=0,3604\pm 0,1419$, & accepto valore radicis negativo, $x=0,2185$: valores autem relati ad unitatem $=$ H

$$a= \quad a''=\frac{u'}{x} \quad = \quad 0,7048$$

$$b= \quad b''=\frac{2u'}{2x-1}=-0,5471$$

$$a'=-b'=-\frac{2u'}{u} \quad =-0,4748$$

44. Monet hic Gaudibertus, hanc combinationem videri maxime idoneam ad obtinendas in pluribus vitrorum generibus radices æquationum reales. Adhibitis enim valoribus $m=1,527$, $m'=1,604$, $u=0,5897$, qui duo postremi sunt admodum diversi ab adhibitis in præcedentibus calculis $m'=1,575$, $u=$ $0,6486$, obtinuit æquationem, in qua $x=0,3745\pm 0,1026$, ubi assumptò valore radicis negativo habetur $x=0,2719$, quod exhibuit valores $a=a''=0,6282$, $b=b''=-0,7488$, a' $=-b'=-0,5793$; dum in combinationibus habentibus secundam lentem isosceliam invenit plerumque radices imaginarias.

CA-

CASUS VII.

Lens intermedia isoscelia, superficies internæ congruentes.

45. Retinetur hic etiam isoscelismus lentis secundæ, qui exhibet $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$: congruentia prima præbet $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$, adeoque $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}u$: congruentia secunda $\frac{1}{a''} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}u$.

46. Assumpto $\frac{1}{a} = x$, & substitutis hisce valoribus in æquatione generali, habebitur $(A' + D' + E')x^3 + (B' + \frac{1}{2}u(3A' + 2D' + E' + K'))x^2 + (C' + \frac{1}{2}u(2B' + L' - F') + \frac{1}{4}u^2(3A' + D' + 2K' - E'))x + N' + \frac{1}{2}u(C' + M' - G') + \frac{1}{4}u^2(B' + E' + H' + L' - F') + \frac{1}{8}u^3(A' - E' + K') = 0$.

47. Fractiones, per quas dividendus erit valor u', erunt $\frac{1}{a} = x$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{a''} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{2}u$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{f''} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{a} + u - 1 = x + u - 1$.

48. Æquatio, numeris substitutis, exhibuit hic etiam coefficientem primi termini $= 0$: reliqui bini exhibuerunt $0{,}6643x^2 - 0{,}3928x + 0{,}0682$, cujus radices sunt imaginariæ: adeoque hæc itidem combinatio in hoc vitrorum genere locum habere non potest.

§. IV.

Plures considerationes supra hasce applicationes, & comparatio cum meis.

49. PRIMA omnium se offert consideranda evanescentia coefficientis primi termini in casu IV, & VII. Ubi primum eam vidi in schedis ad me transmissis, significavi ipsi auctori ejus methodi, non videri tribuendam casui cuidam orto ab eo vitrorum genere evanescentiam illius primi termini in iis casibus. Rescri-

 psit

psit illico, sibi etiam fuisse persuasum, illam evanescentiam non esse tribuendam casui, sed demonstrationem rei antea non quæsivisse, quam statim inventam ad me transmisit: pendet autem ab evolutione valorum desumptorum in secunda tabula ex prima.

50. Coefficiens primi termini in casu IV erat (num. 30) $8A' + 4D' - 4K' =$ (Tab. II) $8K - 8O + 4B - 4B + 4M = 8K - 8O + 4M =$ (Tab. I) $8c(3m+1)(m-1) - \frac{8c(3m+2)(m-1)^2}{m} - \frac{16c(m+1)(m-1)}{m} = \frac{8c(m-1)}{m} \times ((3m^2+m) - (3m+2)(m-1) - 2(m+1))$. Secundus factor rite evolutus exhibet $3m^2 + m - 3m^2 - 2m + 3m + 2 - 2m - 2 = 3m^2 - 3m^2 + 4m - 4m + 2 - 2 = 0$. Quare totus coefficiens illius primi termini, & ipse terminus evanescit, quicumque sint valores m, m', u, & æquatio pro hoc casu deprimitur semper ad gradum secundum, ac evadit $(4B' + 3E' - 2L' + 2K')x^2 + (2C' - \frac{3}{2}E' + L' - M' - F'u)x + N' + \frac{1}{4}E' + \frac{1}{2}M' + \frac{1}{4}H'u^2 - \frac{1}{2}G'u = 0$.

51. Coefficiens primi termini in casu VII erat (num. *46*) $A' + D' + E' =$ (Tab. II) $K - O + B + C =$ (Tab. I) $c(3m+1)(m-1) - \frac{c(3m+2)(m-1)^2}{m} - c(2m+1) + \frac{c(m+2)}{m} = \frac{c}{m} \times ((3m^2+m)(m-1) - (3m+2)(m-1)^2 - (2m^2+m) + m + 2)$. Secundus factor evolutus, subductâ summâ, evanescit, positivis omnibus elisis a negativis.

52. Videtur hæc evanescentia primi termini harum æquationum indicare combinationem illam, in qua lentes extremæ habeant curvaturas æquales, sed contrarias, quas mea æquatio pro omnibus lentibus isosceliis exhibuit in meo casu III per $x = \frac{1}{a''} = -1$ juxta adnotationem ad numerum *69* capitis II Opusculi II. Si enim hæ æquationes, prout provenerunt gradus tertii, exprimantur per $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$; ad reddendam homogeneitatem, facto $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$, quæ est unitas hujus methodi, $= z$, fiet $px^3 + qzx^2 + rz^2x + sz^3 = 0$, nam p, q, r, s sunt coefficien-

tes

tes numerici. Porro in illo casu lentium extremarum habentium sphæricitates æquales, sed contrarias, est $\frac{1}{f} = -\frac{1}{f''}$, adeoque $z = \frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = 0$. Hinc evanescentibus postremis tribus terminis, evadit $px^3 = 0$, quæ æquatio exhibet $p = 0$, & $x^3 = 0$. Prima ex hisce duabus inducit evanescentiam illam coefficientis primi termini æquationis tertii gradus. Secunda indicabit tres valores fractionis $\frac{1}{a''} = x = 0$. Nam reducitur ad combinationem propositam etiam casus, in quo omnes superficies sint planæ, abeuntibus in infinitum radiis sphæricitatum omnium trium lentium.

53. Tribus modis id potest accidere in casu $z = \frac{1}{f} + \frac{1}{f''} = 0$. Primo cum in prima lente convexa, & in tertia concava radius a positivus, & a'' negativus abeunt in infinitum: 2°. cum a negativus, & a'' positivus eo abeunt: 3°. cum originarius valor a' infinitus conjungitur cum a, & a'' infinitis, ac eam ob causam evadente $x = 0$ modo triplici, evanescunt simul omnes tres ipsius valores. In meo casu combinatio, quæ per valorem x finitum destruebat errores, exhiberi potuit per valorem finitum $x = -1$, uti eam mea æquatio exhibuit. Ubi superficies evadunt omnes planæ, eum casum mea æquatio tractata more solito non expressit, juxta numerum postremum hujus Opusculi, sed exprimet tractata hoc alio pacto. Reddita homogeneitate, æquatio evadit, ut diximus, $px^3 + qzx^2 + rz^2x + sz^3 = 0$: facto $z = \frac{1}{a} = -\frac{1}{a''} = -x$, erit $px^3 - qx^3 + rx^3 - sx^3 = 0$, unde oriuntur binæ æquationes $x^3 = 0$, & $p - q + r - s = 0$. Prima ex hisce duabus exhibet tres valores x, sive $\frac{1}{a''} = 0$, nimirum triplicem modum, quo radius a'' evadit infinitus ad reddendam superficiem planam. Secunda verificatur itidem: nam hic p, q, s sunt id, quod in columna tertia, & quarta numeri 75 capitis IV Opusculi II M $= 2,542$ N $= -2,524$, P $= 2,565$; & r id, quod num. 68 capitis II illud P, quod divisio æquatio-

nis

nis gradus tertii in duas reddidit inutile, & omissum est in capitibus III, & IV. Sed assumpto ejus valore expresso in eodem num. 67 capitis II evadit $= -2,500$ (*), adeoque habetur $p = 2,542$, $q = -2,524$, $r = -2,500$, $s = 2,565$, & $p - q + r - s = 0,001$ cum solo discrimine unius unitatis in postrema nota proveniente a neglectu fractionum inferiorum.

54. Porro idem obtinetur etiam applicando ipsius valores $m = 1,527$, $m' = 1,575$, $u = \frac{24}{37}$, cujus logarithmus 9,812909, & numerus proximus 0,6486. Sed ea jam pertinent ad comparationem calculorum ipsius cum meis.

55. Si substituantur mei valores $m = 1,526$, $m' = 1,564$, $u = 0,6054$ ipsius formulis pro meo primo casu numeri 62 capitis IV Opusculi II, qui est idem ac primus ex hisce septem; debet obtineri eadem æquatio, quæ mihi obvenit ibi; quia mea unitas ibi est eadem, ac adhibita ab ipso, ut ostendi hic num. 4, ac eadem incognita, & debet exhibere eosdem radios sphæricitatis

(*) Pro eo valore habetur ibi $P = 3B' + 2D' + L'' - 3A' - 3C' - 2E' - F'$, quorum omnium valores numerici habentur in eadem parte prima tabulæ numeri 75 capitis II præter L'' omissum in capitibus III, & IV, ut inutilem post divisionem æquationis gradus tertii in duas. Is eo num. 68 capitis II est $= \frac{2cu''(3m+2)}{m}$. Reducitur ad numeros in prima columna tabulæ sequentis; tum in secunda invenitur valor P, inventâ summâ trium terminorum positivorum in linea 4, quatuor negativorum in linea 9: earum differentia exhibet in linea postrema ipsum P. Adjeci columnam tertiam pro evanescentia valoris $p - q + r - s$.

2	0,301030	$3B' =$	11,202	$p =$	2,542
c	9,939949	$2D' =$	17,920	$-q =$	2,524
$2.u'$	9,011924	$L'' =$	0,772		5,066
$3m+2$	0,818094		29.894	$-r =$	$-$ 2,500
$.m$	$\bar{9}$,816446	$3A' =$	13,699	$-s =$	$-$ 2,565
$L'' = 0,7717$ . . .	9,887443	$3C' =$	2,991		$-$ 5,065
		$2E' =$	10,014		0,001
		$F' =$	5,690		
			$-$ 32,394		
		$P =$	$-$ 2,500		

tatis, quod poterit, qui velit, videre per se ipsum subductis calculis.

56. Applicatis itidem ejus numeris ad meas formulas, obtinetur in casu I eadem æquatio, ac iis applicatis ad formulas ipsius. In casu II, cujus conditio est itidem eadem, ac apud me numero 68, & eadem incognita, debent quidem obvenire iidem valores finales radiorum sphæricitatis: sed licet idem valor sit ibi assumptus ab utroque pro incognita; æquatio non potest obvenire eadem ob unitatem a me adhibitam diversam ab ea, quam ipse assumpsit. Verum ea, quam exhibent meæ formulæ, facile reducitur ad exhibitam ab ipsius formulis, & expressam hìc numero 23, habendo rationem ad ipsum discrimen unitatum earundem. Mea æquatio in terminis algebraicis habetur num. 58 capitis II, ac habet hanc expressionem $\frac{C''}{a''^2} - \frac{G}{a''} + I = 0$, adeoque incognita est eadem, ac apud ipsum hìc $x = \frac{1}{a''}$; valores autem C'', G'', I numero 57 habentur per m, m', u. Substitutionibus rite peractis obtinetur $\frac{1,147}{a''^2} - \frac{0,9332}{a''} + 0,2146 = 0$; unde eruitur valor imaginarius $\frac{1}{a''} = 0,4068 \pm \surd(-0,0466)$.

57. Porro ad efformandam æquationem utraque methodus discedit ab illa mea algebraica numeri 16 capitis II, per substitutiones diversâ methodo adhibitas valoribus illorum eorundem terminorum $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, retento solo $\frac{1}{a''}$: valores autem illorum omnes sunt ad se invicem in eadem ratione correlativa unitati assumptæ, quod patebit conferendo ipsos cum meis. Cum meus valor $\frac{1}{f}$ sit $= 1$, (num. 53 mei capitis II), & hìc apud ipsum $= u$ (num. 20); omnes reliqui mei reducentur ad suos, multiplicando singulos per u, ut patebit in §. V. Jam vero homogeneitas requirit, ut ubi habetur $\frac{1}{a''^2}$, habeantur singuli ex iis aliis: ubi $\frac{1}{a''}$, habeatur factum e binis: ubi deest $\frac{1}{a''}$, habeatur factum

ctum e ternis. Quare meus coefficiens C'' reducetur ad suum ductus in u, meus G ductus in u^2; meus I ductus in u^3. Id vero ita se habere docet sequens tabula.

C'' = 1,147	0,059563	G = 0,9332	9,969972	I = 0,2146	9,331630
u	9,812009	2.u	9.624018	3.u	9,436027
0,7440	9,871572	0,3927	9,593990	0,0586	8,767657

58. Prima linea continet ipsos valores C'', G, I cum suis logarithmis: secunda u; 2.u; 3.u cum logarithmo ipsius u, ejus duplo, triplo: tertia summas logarithmorum cum eorum numeris: hi sunt ipsi mei reducti ad suos, qui num. 23 erant 0,7438; 0,3924; 0,0594: discrimen non ascendit supra decimas millesimas, quæ ob quantitates neglectas accuratæ esse non possunt.

59. Comparationem valorum meorum $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$ &c. proponam in paragrapho separato sequenti ad contemplandam naturam, & indolem calculi algebraici applicati ad Physicam. Ibi patebit, meos valores omnes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{h''}$, $\frac{1}{H}$ reduci ad suos eâdem multiplicatione simplici per u; adeoque valores finales a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' redactos ad unitatem = H, debere esse prorsus eosdem, cum habeantur ab illa fractione postrema divisa per præcedentes.

60. In meo casu III qui habet tres lentes isoscelias, ut quartus ipsius, applicatis ad ejus formulas meis numeris, non solum æquatio non potest provenire eadem; sed etiam altera non potest reduci ad alteram, quia valor assumptus pro incognita non est utrobique idem: est enim mihi $\frac{1}{a''}$, illi $\frac{1}{a}$. Hinc valores $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p''}$, sunt quidem proportionales inter se, & habent eandem rationem ad valorem $\frac{1}{H}$: sed ista proportionalitas constans pendet ab ipso valore x inveniendo per æquationem resolutam: valores autem finales a, b, a', b', a'', b'', relati ad unitatem = H debent obvenire iidem ob ipsam proportio-

tionalitatem valorum illorum fractionalium cum valore $\frac{1}{H}$.

61. Et quidem applicatis ejus valoribus numericis m, m', n ad meas formulas, quæ habentur pro hoc casu in eodem cap. II numer. 68, & 69, obvenit mihi æquatio $\frac{2,529}{a''^2} - \frac{5,615}{a''} + 2,544 = 0$, quæ exhibuit valorem $x = 1,110 \pm 0,4754$, adeoque 0,635, vel 1,585. Comparatio valorum finalium habetur in tabula sequenti, ubi in prima columna habentur radii sphæricitatum: in secunda, & tertia valores numerici, quos mihi exhibuit radix minor, ipsi major: in quarta, & quinta vice versa ii, quos exhibuit mihi major, illi minor.

	mihi	illi	mihi	illi
$a = -b =$	0,503	0,5036	0,797	0,7963
$a' = -b' =$	0,474	0,4748	0,475	0,4748
$a'' = -b'' =$	0,797	0,7939	0,502	0,5023

62. Discrimen est utique exiguum, & oritur e contemptu fractionum minorum in tot terminis. Calculus numericus prolixior assumpto majore numero decimalium exhiberet consensum majorem: is qui invenitur haud utique fortuitus, satis ostendit, quo vergat natura calculi. Verum hæc ipsa exigua differentia satis docet, posse negligi illas fractiones minores; quia nec in tornandis vitris, nec in investigandis iisdem per focos reflexos, vel per aliam methodum quampiam, sperari potest exactitudo usque ad singulas millesimas distantiæ focalis communis. Consensus autem valorum provenientium a calculis numericis institutis ambitu admodum diverso ex iis diversis formulis algebraicis derivatis per diversas substitutiones satis evincit formularum ipsarum exactitudinem, quibus idcirco, evitatis typorum erroribus per summam revisionum diligentiam, omnino fidendum est.

63. Notandum est ingens discrimen valorum provenientium ex diversis vitrorum generibus, quod ostendit, quam necessarium sit explorare ipsorum vires, & determinare valores m, m', n, quod adeo facile fit ope mei instrumenti, & mea methodo observandi.

Ad comparationem diversarum rationum applicandi formulam generalem ad casus particulares pertinet illud etiam, quod affirmavi in ipso numero 1, meas formulas inde erutas esse multo magis idoneas, ubi agatur de applicatione ad casum quempiam particularem; licet hæc nova methodus reddat multo faciliorem applicationem ipsam; & tabulis semel computatis pro quopiam vitrorum genere, reddatur etiam expeditior calculus numericus, ubi numeri applicari debeant pro ingenti numero casuum diversorum.

64. Id facile apparet in prioribus binis casibus. In primo apud me habentur (num. 49 cap. II) pro efformanda æquatione tantummodo 12 valores A, B, C, &c. dati per m, m', u, eodem modo, quo in prima tabula hujus novæ methodi habentur itidem, & adhibendi sunt omnes, ad inveniendos alios 12 tabulæ secundæ, qui veniunt in usu omnes pro hoc casu: eorum autem tantummodo duo sunt iidem, ac in prima tabula: reliqui ita efformandi sunt ex illis per summas, vel differentias plurium, ut adhuc oporteat multiplicare eorum plures, ac aliquas ex iis summis, & differentiis per u, u^2, u^3. Pro casu II apud me numero 57 adhibentur tantummodo 15 valores ejus generis, hic autem num. 21 non solum adhibentur omnes hi 12 secundæ tabulæ, qui supponunt omnes illos 12 tabulæ primæ, sed eorum posteriorum plures, ac etiam plurium summæ debent iterum multiplicari per u, u^2, u^3, quæ omnia exigunt multo plures transitus a numeris ad logarithmos, & a logarithmis ad numeros. Coefficiens secundi termini æquationis pro hoc casu, qui numero 21 est $M' + L'u + K'u^2$, evolutus per substitutionem valorum M', L', K' expressorum in tabula secunda reducitur ad septem valores primæ cum nova ejusmodi multiplicatione: sunt nimirum $(B - Nu) + (M - 2B + Nu)u + (B - M)u^2$. Is autem in mea formula ejus numeri mei 57 constat tantummodo binis; est enim $-G = -(B'' - E'')$. Et quidem illa ipsa ejus expressio septem terminorum debet reduci ad simplicem $- Gu^2$, ut vidimus hic supra numero 56, ubi æquatio eruta e meis formulis redacta est ad erutam e formulis ipsius multiplicando tantummodo meos coefficientes primi, ac secundi termini, & terminum postremum per u, u^2, u^3.

65. Re-

65. Reductio ejus coefficientis ad terminos simpliciores duos facile fit etiam in ipsis terminis algebraicis, qui evadunt iidem, ac mei $-B'' + E''$ ducti in u. Nam iidem septem termini assumpti alio ordine evadunt $(Mu - Mu^2) + (B - 2Bu + Bu^2) + (Nu^2 - Nu) = (M-N)u(1-u) + B(1-u)^2$. Est autem in tabula I apud ipsum $M = -\frac{4c(m+1)(m-1)}{m}$, $N = \frac{4c(m+1)(m'-1)}{m}$, adeoque $-(M+N) = -\frac{4c(m-m')(m+1)}{m}$, sive (facto $c' = m' - m$, ut apud me) $= \frac{4cc'(m+1)}{m}$: est autem ibidem $B = -c(2m+1)$. Quare facto praeterea $1 - u = u''$, longus ille ambitus terminorum septem reducitur ad duos admodum simplices $-cu''^2(2m+1) + \frac{4cc'uu''(m+1)}{m}$. Hi autem sunt illi ipsi mei $-B'' + E''$ ducti in u^2; habebam enim $B'' = cu''^2(2m+1)$, $E'' = \frac{4cc'u''u'(m+1)}{m}$, & erat meum $u' = \frac{1}{u} - 1 = \frac{1-u}{u}$, adeoque $u'u = 1 - u = u''$, $-cu''^2(2m+1) + \frac{4cc'uu''(m+1)}{m} = -cu''^2u^2(2m+1) + \frac{4cc'u''u^2(m+1)}{m} = (-B'' + E'')u^2$, conspirantibus tot methodis ad reddendum valorem eundem, ut oportebat, sed meâ applicatione exhibente pro hoc casu immediate formulam multo simpliciorem, & magis idoneam ad calculum numericum, quod accidet fere semper, ubi agetur de applicatione ad casus individuos rite peracta.

66. Si conferantur valores finales radiorum sphæricitatis redacti ad distantiam focalem H lentis compositæ assumptam pro unitate in tribus casibus, quos ego erui e meis formulis pro meis vitris in meo capite tertio, & Gaudibertus hic pro vitris suis e suis formulis; facile perspicitur, quanti intersit bene determinare qualitates eorum vitrorum, quæ sunt adhibenda. Pro primo casu, cujus conditiones sunt eædem utrobique, ut nimirum lentes extremæ sint isosceliæ, & æquales, mihi obvenit (num. *62* cap.

cap. IV Opusc. II) etiam lens intermedia parum admodum distans ab isoscelismo, illi autem radius a' fere duplus radii b'; unde fit, ut is casus in meis numeris fere penitus congruat cum quarto, & objectivum compositum possit inverti, dum apud ipsum hic alter ab altero plurimum differt in lente intermedia, cujus superficies inæquales impediunt inversionem. In casu II, qui habet itidem utrobique conditiones easdem, apud me num. 68 obvenit æquatio præbens radices reales, hic apud ipsum num. 23 habentur radices imaginariæ: valores autem primorum quatuor radiorum, qui non pendent a radicibus æquationis ipsius, habent ibi apud me 0,530, hic apud ipsum 0,4748. Demum in casu meo III, qui respondet casui IV ipsius, mihi obvenerunt num. 75 radices imaginariæ, hic ipsi num. 29 reales: & dum apud me, contempto termino irrationali, obvenerunt pro errore minimo sphæricitates lentium extremarum fere æquales inter se, nimirum radii proxime 0,64, media evadente proxime $= 0,53$; ipsi extremæ obvenerunt admodum inæquales, nimirum proxime 0,80, & 0,50 cum media 0,47: usque adeo, ut jam monui, magni interest explorare naturam vitrorum singulorum, & instituere calculos numericos habentes pro basi valores m, m', $\frac{dm}{dm'}$ pertinentes ad ipsos, non autem imitari cum vitris incognitis curvaturas inventas in telescopiis, utut egregiis, elaboratis e vitris, quorum natura individua ignoratur.

§. V.

Comparatio valorum simplicium casus II respondentium diversis unitatibus primis assumptis.

67. PROMISSA est hæc comparatio num. 57, ubi ipsi innititur reductio æquationis deductæ e meis formulis innixis unitati primæ $= \frac{1}{f}$, ad deductam ex hisce aliis respondentibus unitati $= \frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$. Hæc apponimus tantummodo ad sistendam oculis ipsis naturam calculi, ac indolem transformationum algebraicarum pervenien-

nientium ad eundem terminum diversis viis, ut earum consensus hìc minuat timorem errorum, qui potuerint subrepere in calculis prolixioribus.

68. Utrobique communes sunt valores $m, m', u, c = \frac{m-1}{m'-1}$, & valor $m'-m$, quem ego appellavi c', erit itidem communis, ut & $\frac{1}{a''} = x$: si autem respiciantur binæ evolutiones hujus casus apud me numeris 53, 54, 55 capitis II, & hìc numeris 20, 21, 22, invenientur pro reliquis valores sequentes:

Fractionarii simplices	mihi	illi
$1:f$	1	u
$1:f'$	-1	$-u$
$1:f''$	$1:u-1=u'$	$1-u=u(1:u-1)=uu'$
$1:a$	$1:2$	$(1:2)u$
$1:a'$	$-1:2$	$-(1:2)u$
$1:h = m-1$	$m-1$	$u(m-1)$
$1:h' = -(m-1)$	$-(m'-1)$	$-u(m-1)$
$1:h'' = (m-1):f''$	$u'(m-1)$	$uu'(m-1)$
$1:p' = 1:h$	$m-1$	$u(m-1)$
$1:p'' = (1:h)+(1:h')$	$m-1-(m'-1)=m-m'=-c'$	$-c'u$
$1:H=(1:h)+(1:h')+(1:h'')$	$m-m'+u'(m-1)=-c'+u'(m-1)$	$-c'u+uu'(m-1)$

69. Patet hinc, omnes illius valores esse eosdem, ac meos ductos in u. Quare, ut monui num. 27, ubicumque occurrit in termino quopiam unus tantum ex hisce valoribus $1:f$; $1:f'$; $1:f''$; $1:a$; $1:a'$; $1:p'$; $1:p''$, debet is terminus semper multiplicari per u: ubi autem occurrit productum e binis, vel ternis oportet ipsum multiplicare per u^2, vel u^3: cum is occurrat unicus, ubi in formula numeri 16 mei capitis II, habetur $\frac{1}{a''^2}$, habeatur autem duplex, ubi habetur $\frac{1}{a''}$, triplex in omnibus reliquis terminis carentibus eo valore incognito, quod ipsum exigebatur a terminorum homogeneitate; patet multiplicandum fuisse per u coefficientem primi termini illius meæ æquationis, uti monui, per u^2 coefficientem secundi, per u^3 postremum terminum meæ æquationis, quibus præstitis, ipsa mea abiit in æquationem ipsius.

§. VI.

§. VI.

Methodus extendendi usum æquationis generalis ad applicationes multo plures.

70. ÆQUATIO generalis numeri 11 reducitur semper ad gradum secundum; si per unam e tribus determinationibus, quæ remanent arbitrariæ, assumatur pro $\frac{1}{f}$ quivis valor cognitus. Is autem obveniet cognitus etiam; si assumatur quævis ratio arbitraria $n:1$ distantiæ focalis lentis primæ ad distantiam focalem tertiæ: nam eæ distantiæ focales sunt h, h'', & per num. 10 ejusdem capitis II habetur $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h''} = \frac{m-1}{f''}$. Quare erit $1:n::h'':h:: \frac{1}{h}:\frac{1}{h''}::\frac{m-1}{f}:\frac{m-1}{f''}::\frac{1}{f}:\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$ (num. 6): adeoque erit $\frac{n}{f} = 1 - \frac{1}{f}$, & $\frac{1}{f} = \frac{1}{n+1}$: si is valor ponatur $= n'$, & substituatur in æquatione generali numeri 11; ac primi tres ejus termini, qui fient $n'^3A' + n'^2B' + n'C'$ fiant $= P'$; ipsa æquatio evadet $\frac{n'^2D'}{a} + \frac{n'E'}{a^2} + \frac{n'F'+G'}{a'} + \frac{H'}{a'^2} + \frac{n'^2K'+n'L'}{a''} + \frac{M'+(1-n')E'}{a''^2} + N' + P' = 0$.

71. Poterunt jam assumi bini e tribus valoribus a, a', a'' arbitrarii, & remanebit æquatio gradus secundi cum valore n' adhuc arbitrario; cujus determinatio adhiberi poterit ad reddendas reales radices æquationis, reddendo positivum valorem inclusum signo radicali. Si quis velit lentem primam isosceliam; habebit $\frac{1}{a} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2}n'$: si secundam; $\frac{1}{a'} = \frac{1}{2f'} = -\frac{1}{2}n$: si tertiam; $\frac{1}{a''} = \frac{1}{2f''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2f'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n' = \frac{1}{2}(1-n')$.

72. Calculus evadet multo brevior; si secunda, & tertia assuman-

mantur plano-convexæ, primâ superficie existente planâ: factis enim $\frac{1}{a'}$, & $\frac{1}{a''} = 0$, habebitur æquatio $\frac{n'E'}{a^2} + \frac{n'^2D'}{a} + N' + P' = 0$, sive $\frac{1}{a^2} + \frac{n'D'}{E'a} + \frac{N'+P'}{n'E'} = 0$. Ibi erit $\frac{1}{a} = -\frac{n'D'}{2E'} \pm \surd\left(\frac{n'^2D'^2}{4E'^2} - \frac{N'+P'}{n'E'}\right)$. Sed ad habendas radices reales oportet valor $\frac{N'+P'}{n'E'}$ sit negativus, vel zero, vel si sit positivus, non sit major valore $\frac{n'^2D'^2}{4E'^2}$, sive valor n'^2 non sit minor valore $\frac{4E' \times (N'+P')}{D'^2}$. Verum valor n' non potest assumi nimis magnus, ne sit nimis exigua distantia focalis h primæ lentis, cujus valor ob $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f} = n'(m-1)$, est $\frac{1}{n'(m-1)}$; id enim secum traheret nimis exiguum saltem alterum e radiis sphæricitatis a, b.

73. Multæ aliæ relationes inter valores a, a', a'' facile induci possunt. Si primæ duæ lentes debeant habere sphæricitates contrarias, & æquales; fiet $\frac{1}{a'} = -\frac{1}{a}$: si extremæ æquales; $\frac{1}{a''} = \frac{1}{a}$: si secunda æqualis, & contraria tertiæ; $\frac{1}{a'} = \frac{1}{a''}$. Infinita alia relationum genera facile induci possunt vel inter distantias focales binarum lentium, vel inter radios sphæricitatis ejusdem lentis; & ubi ars Chymica invenerit certas methodos obtinendi vitra habentia satis magnum discrimen in vi distractivâ satis pura, & speciei constantis; erit utique operæ pretium, si instituantur calculi pro quamplurimis conditionibus arbitrariis diversis, ut seligantur combinationes, in quibus radii sphæricitatum sint satis magni respectu distantiæ focalis objectivi compositi.

74. Adjiciam hic demum usum alium formulæ generalis numeri 11. Potest ipsa facile reduci ad objectiva composita e duabus lentibus tantummodo, & quidem non solum ita, ut prima sit convexa e vitro communi, sed etiam ut ipsa prima sit concava

e flint,

e flint . Obtinebitur primum ; si fiat $\frac{1}{a''}$, & $\frac{1}{f''} = 0$, quo casu lens tertia abit in vitrum utrinque planum, quod nihil agit : tum vero evadit $\frac{1}{f} = 1 - \frac{1}{f''} = 1$, ac æquatio reducitur ad illam ipsam, quam ego minore ambitu obtinui in meo capite II pro combinationibus binarum lentium , quarum primam posui e vitro communi . Obtinetur secundum , nimirum objectivum compositum e binis lentibus , quarum prima concava e flint ; si fiat $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{f} = 0$, quo casu lens prima abit in laminam planam : æquatio autem evadit $\frac{H'}{a'^2} + \frac{G'}{a'} + \frac{E'}{a''^2} + \frac{M'}{a''} + N = 0$: fit ibi $\frac{1}{f''} = 1$, ex quo valore, & $\frac{1}{f'} = -u$, derivantur etiam $\frac{1}{h'} = \frac{m'-1}{f'} = u'(m'-1)$, $\frac{1}{h''} = m-1$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} + u$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{f''} - \frac{1}{a''} = 1 - \frac{1}{a''}$.

75. Ea usui esse possunt , ubl jam semel pro quodam vitrorum genere computatæ sint binæ tabulæ , quas hìc subjicimus computatas a R. P. Gaudiberto , ut promisimus num. 12 , & quarum usus erit egregius , ubi habetur ingens copia vitrorum ejus duplicis generis , ad evolvendum ingentem numerum casuum diversorum : nam , uti jam diximus , ubi agatur de evolvendo uno , alterove casu , evadit multo magis expedita pro calculis numericis applicatio immediata meæ æquationis numeri 16 , quam adhibui in meo capite II hujusce secundi Opusculi .

TA-

TABULA I.

$m = 1{,}527$: $m' = 1{,}575$: $u = \frac{24}{37} = 0{,}64864$: $c = \frac{m-1}{m'-1} = 0{,}9165$

		Numeri	Logarithmi
$A =$	$c\,m^2$	2,1371	0,329821
$B = -$	$c(2m+1)$	$-$ 3,7156	0,570026
$C =$	$\frac{c(m+2)}{m}$	2,1169	0,325709
$D =$	m'^2	2,4806	0,394562
$E = -$	$(2m'+1)$	$-$ 4,15	0,618048
$F =$	$\frac{m'+2}{m'}$	2,2698	0,355995
$G =$	$(3m'+1)(m-2)$	3,0171	0,479586
$H = -$	$\frac{4(m'+1)(m-1)}{m'}$	$-$ 3,4464	0,537368
$I =$	$\frac{(3m'+2)(m-1)^2}{m'}$	1,1859	0,074033
$K =$	$c(3m+1)(m-1)$	2,6956	0,430666
$L =$	$c(3m+1)(m'-1)$	2,9412	0,468513
$M = -$	$\frac{4c(m+1)(m-1)}{m}$	$-$ 3,1973	0,504780
$N = -$	$\frac{4c(m+1)(m'-1)}{m}$	$-$ 3,4885	0,542637
$O =$	$\frac{c(3m+2)(m-1)^2}{m}$	1,097	0,040218
$P =$	$\frac{2c(3m+2)(m-1)(m'-1)}{m}$	2,3939	0,379105
$Q =$	$\frac{c(3m+2)(m'-1)^2}{m}$	2,3061	0,115932

TABULA II.

		Numeri	Logarithmi
$u =$	$\frac{24}{37}$	0,64864	9,812009
$A' =$	$K - O$	1,5986	0,203740
$B' =$	$3A + O - 2K + (P - I - L)u$	0,9929	9,996906
$C' =$	$K - 3A + (2L - P)u + (G - Q)u^2$	$-$ 0,7330	9,865104
$D' =$	B	$-$ 3,7156	0,570026
$E' =$	C	2,1169	0,325709
$F' = -$	Hu	2,2355	0,349377
$G' =$	Eu^2	$-$ 1,7461	0,242066
$H' = -$	Fu	$-$ 1,4723	0,168004
$K' =$	$B - M$	$-$ 0,5183	9,714581
$L' =$	$M - 2B + Nu$	1,9712	0,294731
$M' =$	$B - Nu$	$-$ 1,4529	0,162236
$N' =$	$A - Lu + Qu^2 - Du^3$	0,1018	9,007748
	$u' = m - 1 - u(m' - 1$,	0,154	9,187521

SUPPLEMENTUM II.

Formulæ pro unione plurium colorum per totidem substantias.

1. IN hoc Opusculo II applicavimus formulas fundamentales ad unionem duorum colorum per duas substantias, supponendo inventos methodo Opusculi I valores medios m, & m', qui determinant ipsarum qualitates refractivas, & fractionem $\frac{dm}{dm'} = u$, quæ determinat relationem, quam habent ad se invicem ipsarum qualitates distractivæ pertinentes ad eos binos colores, & pro iis binis coloribus assumpsimus primum rubeum, & extremum violaceum sensibiles in mediocri obscuritate. Demonstravimus autem, per binas substantias earum omnium, circa quas huc usque experimenta nobis instituere licuit, non posse uniri, nisi duos colores tantummodo, sive adhibeantur binæ lentes, sive tres: innuimus autem, per plures substantias posse uniri plures; si qualitates ipsarum non sint ejusmodi, ut nimis removeant focum communem a lente composita, aut exigant radium aliquem sphæricitatis nimis exiguum.

2. Unio omnium colorum, qui per immensum numerum graduum a se invicem differunt, requireret ex una parte immensum numerum lentium, quarum substantiæ per totidem gradus differrent a se invicem: sed ex alia, etiam si haberentur totidem substantiæ, quarum omnium qualitates essent bene cognitæ; crassitudo lentis compositæ orta e summis crassitudinum singularum obstaret ejusmodi effectui. Posset quidem id obtineri per lentem, vel etiam globulum, cujus natura secum ferret gradationes totidem in singulis ejus stratis ab extima superficie usque ad centrum, idoneas ad uniendos in unico puncto radios omnes heterogeneos digressos ab unico puncto objecti, correctis penitus erroribus omnibus, qui possint provenire tam a diversa refrangibilitate, quam a figura: problema esset admodum sublime, & fortasse positum longe supra omnem vim mentis humanæ, datâ lege mutationum omnium

omnium in vi refractiva omnium radiorum heterogeneorum, & naturâ discriminis inter vires substantiarum perpetuo variatas, invenire dispositionem earum ad efformandam lentem, vel globulum, a cujus ordine proflueret ejusmodi unio: solus ordo in variatione densitatis partium internarum a superficie ad centrum sufficeret ad unionem omnium radiorum homogeneorum, & problema, eo restrictum, esset multo minus arduum: verum ne id quidem sufficeret pro unione perfecta; nam distributio requisita ad præstandam unionem radiorum provenientium ab una distantia, non conjungeret radios digressos ab alia, & effectus est ad sensum idem pro quavis distantia tantummodo, quando eadem distantia est satis magna respectu radiorum curvaturæ superficierum sphæricarum excipientium radios luminis, ut hi haberi possint pro parallelis.

3. Ea problemata pertinebant ad vim infinitam mentis Divinæ, quæ naturam omnem disposuit, & quæ non eorum tantummodo problematum, sed infinitorum aliorum, sed omnium, solutiones perspicit unico, & momentaneo simul, ac perenni aspectu. Idcirco fortasse Divinus Naturæ conditor non solum tres diversos humores in oculo collocavit, sed crystallinum efformavit ex ingenti numero stratorum diversæ naturæ, & densitatis, ut possent saltem quamplurima radiorum coloratorum genera digressa ex unico puncto conjungi in fundo oculi itidem in puncto unico, ac fibras musculares disposuit, per quas figura ipsa humoris crystallini mutari posset, unde fit, ut objecta posita in distantiis nonnihil diversis videamus omnes satis distincta, nec desint homines tam felici oculorum constitutione præditi, qui tam remotissima quæque, quam admodum proxima satis distincte perspiciant.

4. In telescopiis distinctionem pro diversis distantiis acquirimus per motum totius ocularium systematis accedentis ad objectivum, vel ab eo recedentis; sed ea distinctio turbatur in telescopiis dioptricis ab erroribus diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ: minuuntur ii errores, & augetur distinctio in acromaticis per unionem binorum colorum, qui non conjunguntur, nisi duo tantum per ea objectiva; licet enim ea componantur e tribus lenti-

 bus,

bus; non habent, nisi duas substantias: augebitur vis; si inveniantur tres substantiæ idoneæ, ut diximus, quæ tres conjungant: & idcirco in secunda e veteribus illis meis dissertationibus exhibui methodum deveniendi ad formulas, quæ per plures lentes e substantiis naturæ diversæ conjungant totidem colores.

5. Major multiplicatio lentium obest ex pluribus capitibus: præter crassitudinem lentis compositæ, quæ continet summam crassitudinum omnium lentium singularum, habetur etiam imminutio luminis, cujus in quovis ingressu ex aere in vitrum, & egressu e vitro in aerem amittitur juxta observationes Bouguerii pars luminis eo advenientis quadragesima: verum utrumque incommodum esset idem; si tres lentes, quæ nunc adhiberi solent ad componenda objectiva acromatica, essent omnes e diversis substantiis, & non duæ extremæ ex eadem, uti nunc fit. Ex alia autem parte dum nunc binis extremis coloribus conjunctis in inversione spectri per binas substantias, colores intermedii parum admodum ab iis distant positi nonnihil ad latus; conjuncto etiam intermedio cum extremis per tres substantias, reliqui deberent multo minus discedere ab iis tribus, evagatione remanente prorsus insensibili.

6. Ad unionem duorum per duas substantias necessaria est ratio qualitatum distractivarum, quas habent illæ binæ substantiæ relate ad illos binos colores, quam exhibet ille valor $\frac{dm}{dm'} = n$, cujus determinandi modum pro coloribus extremis exhibuimus in fine Opusculi I. Pro unione plurium oportet habere vel plures valores absolutos dm, vel rationes eorum valorum pertinentium ad totidem binaria tam substantiarum, quam colorum. Cum illam dissertationem conscriberem, non habebam methodum satis idoneam pro determinandis satis accurate iis valoribus absolutis ope duplicis heliostatæ. Non occurrebat tunc pro iis rationibus nisi determinatio curvæ, de qua egi hic in Opusculo I num. 95, sed invenienda methodo habente analogiam cum methodo interpolationum, quam ibidem tantummodo indicavi: evolvi autem fuse, sed aliquanto complicatius in eadem veteri dissertatione II. Ea me-

methodus innitebatur observationi colorum, qui in inversione spectri directa incipiunt, ac desinunt extare soli, quæ observatio non potest esse accurata ob insensibilem transitum unius speciei colorum ad aliam. Nunc res perfici potest multo melius per observationes, quas proposui in paragrapho X Opusculi I. Exponam hic primo ea, quæ pertinent ad eruendas formulas pro unione plurium colorum per plures substantias ope valorum dm absolutorum: tum adjiciam etiam ea, quæ pertinent ad eandem determinationem per solam rationem ipsorum dm ad se invicem, quæ exhibebit hic formulas multo magis ordinatas, & perspicuas, quam in eadem illa veteri dissertatione II.

7. Ostensum est in illo paragrapho X, quo pacto pro quavis substantia respectu coloris cujusvis haberi possit ratio m, quam habet sinus anguli incidentiæ ex aere in illam substantiam ad sinum anguli refracti, ope duplicis heliostatæ ita, ut etiam differentiæ valorum m pertinentium ad diversos colores sperari possint non nimis erroneæ. Valor inventus pro radiis primæ speciei in substantia prima dicatur m, in secunda m', in tertia m'', &c. Differentia valoris m inventi in prima substantia pro primo e coloribus conjungendis ab invento pro secundo dicatur dm, ab invento pro tertio $dm1$, pro invento a quarto $dm2$, & ita porro: eodem pacto ex differentiæ valorum, qui inventi sint in secunda substantia, dicantur dm', $dm'1$, $dm'2$, &c., in tertia dm'', $dm''1$, $dm''2$, &c., & ita porro.

8. Retineantur denominationes reliquæ paragraphi II capitis I Opusculi II, ubi a, b sunt radii sphæricitatum lentis primæ, a', b' secundæ, a'', b'' tertiæ, &c., $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, &c., R distantia focalis lentis compositæ, valor

$$q = \frac{m-1}{m}\left(\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2 f} + \frac{3m^2+m}{pf^2} - \frac{4(m+1)}{apf} + \frac{3m+2}{p^2 f}\right),$$

formatis q', q'', q''', &c. eodem modo per suos m, a, p, f habentes totidem accentus, quot habent ipsi q, quibus

bus respondent : $\frac{1}{p'} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{p''} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$, $\frac{1}{p'''} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''}$, &c. Erit demum $\frac{1}{R} = \frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'} + \frac{m''-1}{f''} + \frac{m'''-1}{f'''}$, &c. $+ \frac{1}{p}$.

9. Pro correctione erroris diversæ refrangibilitatis habebuntur sequentes æquationes

$$\text{I} \ldots \frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} + \frac{dm'''}{f'''}, \&c. = 0$$

$$\text{II} \ldots \frac{dm1}{f} + \frac{dm'1}{f'} + \frac{dm''1}{f''} + \frac{dm'''1}{f'''}, \&c. = 0$$

$$\text{III} \ldots \frac{dm2}{f} + \frac{dm'2}{f'} + \frac{dm''2}{f''} + \frac{dm'''2}{f'''}, \&c. = 0 .$$

&c.

10. Si numerus substantiarum, qui est idem, ac numerus lentium, fuerit n; patet, numerum earum æquationum fore $n-1$. Quamobrem ex iis eliminari poterunt omnes valores $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{f'''}$, &c., quorum post primum $\frac{1}{f}$ numerus erit itidem $n-1$, habitis iis omnibus per $\frac{1}{f}$, qui si fiat $=1$, erunt cogniti ii valores omnes in numeris. Hinc habebuntur itidem in numeris omnes valores $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$, $\frac{1}{p'''}$, &c., quorum singuli habentur per suos m, & f; sed nullum erit opus primi $\frac{1}{p}$, ubi agitur de objectivo excipiente radios digressos e distantia ita magna, ut is censeatur $=0$.

11. Accedet jam æquatio pro correctione erroris figuræ sphæricæ $q + q' + q'' + q'''$, &c. $= 0$, ubi in valore q evanescent postremi tres termini habentes $\frac{1}{p}$, & habebuntur in omnibus cogniti valores omnes præter $\frac{1}{a}$, & $\frac{1}{a^2}$ in q, $\frac{1}{a'}$, & $\frac{1}{a'^2}$ in q', atque ita porro. Valores indeterminati a, a', a'', a''', &c. erunt nu-

numero n, adeoque remanebunt determinationes arbitrariæ numero $n-1$, relicto pro incognita unico ex iis, quo determinato per æquationem gradus secundi, habebuntur etiam omnes valores $\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-1$, $\frac{1}{b'}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{b''}=\frac{1}{a''}-\frac{1}{f''}$, &c., ut & valores $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{h''}$, &c. qui juxta num. 11. ejusdem capitis II Opusculi II erunt $=\frac{m-1}{f}$, $\frac{m'-1}{f'}$, $\frac{m''-1}{f''}$, &c.: adeoque habebitur etiam valor $\frac{1}{H}=\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}$, &c., qui divisus per singulos fractionarios exhibebit valores a, b, a', b', a'', b'', &c. h, h', h'', &c. respectu unitatis $=H$.

12. Quod si habeantur non valores absoluti dm, sed solæ rationes mutuæ valorum dm, $dm1$, $dm2$ ad sibi respondentes dm' $dm'1$, $dm'2\ldots dm''$, $dm''1$, $dm''2$, &c., methodo supplementi VI Opusculi I; procedendum erit hoc alio pacto. Fiant $\frac{dm'}{dm}=u$, $\frac{dm''}{dm}=u'$, &c., $\frac{dm'1}{dm1}=u1$, $\frac{dm''1}{dm1}=u'1$, &c., & ita porro, ac dividendo in singulis æquationibus I, II, III, &c. numeri 9 omnes terminos per $dm1$, $dm2$, $dm3$, &c., illæ æquationes evadent

$$\text{I} \ldots \frac{1}{f}+\frac{u}{f'}+\frac{u'}{f''}+\frac{u''}{f'''}, \text{\&c.}=0$$

$$\text{II} \ldots \frac{1}{f}+\frac{u1}{f'}+\frac{u'1}{f''}+\frac{u''1}{f'''}, \text{\&c.}=0$$

$$\text{III} \ldots \frac{1}{f}+\frac{u2}{f'}+\frac{u'2}{f''}+\frac{u''2}{f'''}, \text{\&c.}=0.$$

Facto autem $\frac{1}{f}=1$, habebuntur omnes valores $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{f'''}$ in numeris eodem modo, adeoque & $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$, $\frac{1}{p'''}$, ac in æquatione numeri 11 habebuntur omnia præter valores $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{a'''}$, &c. inveniendos per positiones arbitrarias numero $n-1$, & illam ipsam æquationem.

13. Por-

13. Porro valores illi fractionarii admodum accurati haberi possunt methodo exposita in postremo supplemento Opusculi I; adeoque habetur jam methodus uniendi colores quotcunque per totidem lentes e totidem substantiis, dummodo inveniantur substantiæ idoneæ ad exhibendos radios sphæricitatum non nimis exiguos respectu distantiæ focalis communis. Et quidem theoria est generalis pro quocunque numerò colorum: sed extendi omnino non poterit ultra tres; cum aucto numero lentium augeatur summa crassitudinum, quæ omnes neglectæ sunt in calculis exhibentibus formulas ubique adhibitas. Determinationes, quæ remanent arbitrariæ, possent adhiberi ad corrigendum multo magis errorem sphæricitatis conjungendo radios, qui incurrunt prope centrum objectivi non solum cum iis, qui incurrunt prope margines, sed etiam cum intermediis, vel incurrentibus ad plures distantías a centro: sed calculi evaderent admodum implexi, & prorsus inextricabiles.

14. Ejusmodi correctio ulterior obtineri potest minus incommode, posteaquam inventa jam sit combinatio, quæ exhibeat unionem illam, si minus accuratam, saltem proximam, quæ obtineri potest per formulas Opusculi II. Methodo admodum elementari potest determinari quantitas errorum residua in objectivo ita composito, quod facile admodum præstatur, ubi jam innotescunt radii sphæricitatum eruti ex iis formulis. Tum calculo numerico prolixo quidem, sed ordinatissimo, inveniri possunt exiguæ mutationes inducendæ in ejusmodi radios, quæ corrigant ipsa illa errorum residua. Ejusmodi methodum trademus in supplemento sequenti, quæ methodus plurimum conducet ad perficiendam horum objectivorum theoriam.

SUPPLEMENTUM III.

Methodus deprehendendi, & corrigendi errorem residuum objectivi acromatici determinati per formulas propositas.

§. I.

Idea generalis methodi adhibendæ.

1. DIXIMUS jam toties, errores tam refrangibilitatis, quam sphæricitatis, etiam eos solos, qui pertinent ad unionem binorum colorum extremorum, non corrigi accurate, sed tantum proxime per formulas exhibitas in hoc Opusculo secundo, in quibus nimirum negligi debuerunt quantitates ordinum inferiorum, sine quo neglectu ipsæ evasissent complicatissimæ, & intractabiles. Quanta sit magnitudo errorum residuorum in quovis objectivo, id quidem deprehendi potest partim ope formularum, in quibus nihil contemnatur, partim ope Trigonometriæ: potest autem & remedium adhiberi ope regulæ falsæ positionis ita, ut etiam per objectivum compositum ex duabus lentibus conjungantur accurate in unico puncto radii extremi primus rubeus, & postremus violaceus, tam ii, qui incidunt in marginem aperturæ, quam ii, qui incidunt prope centrum; & vero etiam radius utriuslibet speciei, vel medius incidens in punctum medium inter centrum aperturæ, & marginem, quod adhuc magis corriget errorem sphæricitatis: per objectivum autem compositum e tribus lentibus conjungi poterunt etiam ambo radii pertinentes ad species extremas, & incidentes in punctum medium inter centrum, & marginem aperturæ, relicta adhuc una indeterminatione ad majorem unionem per tres lentes e tribus substantiis diversis. Evolvam hic ea omnia exhibendo methodum, quæ quidem erit utilissima potissimum, ubi ars Chymica eo demum pervenerit, ut habeantur substantiæ perspicuæ densitatis uniformis satis discrepantes in vi distractiva, quæ obveniant constanter eædem; nam calculus nume-

ricus applicandus ad ea omnia, licet ordinatissimus, & admodum elementaris, ita est prolixus, & molestus, ut non videatur par labori fructus, si is pro uno tantummodo, vel altero telescopio suscipiatur.

2. Pro deprehendendo errore oportet determinare accurate distantiam concursus cum axe radii tam primi rubei, quam postremi violacei, tam ejus, qui advenit infinite proximus axi, quam ejus, qui incidit in punctum aperturæ positum in data distantia ab ejus centro. Pro hoc posteriore adhiberi potest Trigonometria; obveniunt enim triangula habentia angulos exiguos quidem, sed tractabiles: pro illo priore anguli evanescentes tractari utique non possunt per tabulas sinuum: sed illud commode accidit, quod pro formula inventa numero 41 capitis I hujus Opusculi II exprimente distantiam concursus cum axe radii datæ speciei delati datâ directione ad punctum superficiei sphæricæ infinite proximum axi ipsi a superficie eadem, nihil est neglectum. Quamobrem ubi radius transmittitur per quotcumque superficies sphæricas, quarum radii sphæricitatis, & distantiæ mutuæ sint cognitæ, applicatâ eâdem formulâ aliis post alias, invenitur finalis distantia quæsita puncti concursus cum axe a superficie ultima. Factâ distantiâ puncti dirigentis radium incidentem a superficie $= p$, distantiâ puncti dirigentis radium refractum $= q$, distantiâ superficiei proxime præcedentis a proxime sequenti $= c$, radio sphæricitatis $= a$, vel $= b$, habendo semper pro positivis valores a, b, p, q, ubi incipiendo a superficie habent eandem directionem, quam radius progrediens, valor q superficiei præcedentis imminutus per valorem c, si fuerit positivus, auctus vero, si negativus, nimirum $q - c$, erit valor p pro superficie sequenti: est autem mihi punctum dirigens radium incidentem, vel refractum id, in quo concurrit cum axe ejus directio.

3. Pro applicatione Trigonometriæ considerabitur radius delatus ad primam superficiem lentis primæ convexam, ut parallelus axi, & ex distantia puncti, in quod incidit, ab axe ipso, ac radio sphæricitatis innotescet sinus anguli incidentiæ, qui exhibebit sinum anguli refracti, & distantiam concursus, quem habet dire-

directio radii refracti cum axe, ab ipsa superficie, ex quo eruetur & distantia concursus cum axe, quam habet directio radii refracti, cum angulo, quem hæc ibi continet. Distantia ejus superficiei a sequente, ablata ab ea distantia, vel illi addita, exhibebit distantiam ab eadem puncti dirigentis radium incidentem in novam superficiem, ubi jam habebitur etiam angulus, quem is ibi continet cum axe, inventus in calculo præcedente. Determinabitur novus angulus refringens, qui determinabit distantiam a superficie, quam habebit concursus directionis radii refracti cum axe, & ejus angulus cum ipso: eadem operatio repetenda erit pro omnibus sequentibus superficiebus. Quodvis punctum dirigens radium refractum respectu superficiei præcedentis evadit punctum dirigens radium incidentem respectu sequentis (*).

4. Hinc pro prima superficie habebitur hujusmodi problema. Datâ distantiâ ab axe puncti superficiei sphæricæ, quæ sit prima lentis cujuspiam, & convexa, in quod incidit radius parallelus ipsi axi, cum radio sphæricitatis, & ratione sinuum anguli incidentiæ, & refracti, invenire distantiam puncti dirigentis radium refractum ab ipsa superficie, & angulum, quem is continet cum ipso axe. Pro reliquis omnibus problema erit hujusmodi. Datâ distantiâ puncti dirigentis radium incidentem in superficiem sphæricam ab ipsa superficie, angulo, quem directio ejus radii continet cum ipso axe, & radio sphæricitatis, invenire distantiam puncti dirigentis radium refractum ab ipsa superficie, & angulum, quem ejus directio continet cum ipso axe.

(*) Appellatur hic, & appellabitur in sequentibus, punctum dirigens radium incidentem, vel refractum, concursus rectæ, per quam is tendit, cum axe; sive is concursus fiat ex parte, versus quam ipse radius tendit, sive ex opposita: in priore casu radius convergit respectu axis, in posteriore divergit: id punctum appello dirigens eum radium, sive is inde recta progrediens deveniat ad ipsum axem, aut ab eo discesserit, sive detortus postea, aut prius, habeat ibi directionem, quæ utrinque producta ipsum secet ibidem. Pro angulo autem, quem ea ibi continet cum axe, intelligo semper acutum e binis, qui habentur in ipso concursu, qui duo anguli, alter supplementum alterius, habent sinum communem; sed tabula sinuum exhibet immediate acutum.

5. Ut punctum dirigens radium refractum a superficie præcedente evadit punctum dirigens radium incidentem respectu sequentis, ita angulus, quem continet cum axe directio radii refracti ab illa, evadit is, quem continet directio radii incidentis in hanc. Quæsita superficiei præcedentis evadunt data sequentis: distantia autem superficiei sequentis a puncto dirigente radium incidentem in ipsam habetur, ut innuimus, e distantia præcedentis a puncto dirigente ipsius radium refractum, & e distantia superficierum demenda, vel addenda.

6. Porro dum fit transitus a superficie præcedente ad sequentem, problema, quod proposuimus secundo loco, habet casus quatuor ortos e diversa positione puncti dirigentis radium incidentem, & centri sphæricitatis respectu superficiei ipsius, qui casus subdividuntur in alios plures, ut patebit inferius in evolutione singulorum. Ii casus oriuntur ex eo, quod utrumque ex iis punctis potest jacere ultra superficiem, vel punctum dirigens radium incidentem ultra, & centrum citra, vel illud citra, & hoc ultra, vel utrumque citra. Subdivisiones oriuntur ex eo, quod punctum dirigens radium incidentem potest distare a superficie magis, quam illud centrum, vel minus, quod ea superficies potest esse prima, vel secunda suæ lentis, quod punctum dirigens radium refractum potest cadere itidem ultra, vel citra superficiem ipsam. Punctum dirigens radium incidentem jacet ultra, si radius incidens convergit respectu axis; citra, si divergit: centrum jacet ultra in prima superficie convexa lentis cujusvis, & in secunda concava; jacet citra in prima concava, & secunda convexa: si punctum dirigens radium refractum jacet ultra; is convergit post refractionem; si illud jacet citra; hic divergit. Accedunt recessus in infinitum centri sphæricitatis, ubi superficies sit plana, ac puncti dirigentis radium incidentem, vel refractum, ubi is advenit parallelus axi, vel evadit parallelus per refractionem.

7. Solutio problematis habita pro uno ex hisce casibus transfertur ad alios omnes per leges generales, quas ego exhibui in tertio meorum elementorum tomo pro transformatione locorum geometricorum: verum ad instituendos calculos trigonometricos cum

cum minore errandi periculo præstat delineare pro singulis saltem crasso modo figuras idoneas iis respondentes, quæ calculum ipsum dirigant. Inventio puncti dirigentis radium refractum pro superficie præcedente, quod evadit punctum dirigens radium incidentem pro sequente, & anguli, quem is radius continet cum axe, ac curvatura superficiei, determinabunt formam figuræ delineandæ usque ad directionem radii progredientis, quam exhibebit angulus refractus erutus e suo sinu. Verum proderit plurimum pro delineatione eâdem solutio præcedens, quæ pertinet ad radium infinite proximum axi, quæ per valores positivos, & negativos formularum exhibebit puncta concursuum cum axe: nam concursus cum axe directionis radii incidentis in punctum aperturæ etiam marginale, qui concursus est illud punctum dirigens observandum in methodo trigonometrica, parum distare potest a concursu directionis radii illius, qui primo incidit infinite proximus ipsi axi: cum nimirum error figuræ sphæricæ sit exiguus.

8. Remanet monendum illud, cum in casu lentium sibi succedentium radius debeat concipi incidens in primam superficiem ex aere in vitrum, rationem sinuum ibi debere pro ipsa accipi m ad 1, & pro secunda superficie, in qua concipitur egrediens e vitro in aerem, debere accipi 1 ad m: atque id quidem fieri debet etiam, ubi lens præcedens est contigua sequenti sino ullo intervallo, concipiendo velum tenue aeris intermedium, quæ consideratio perquisitionem non turbat. Hinc in formulis loco valoris m pertinentis ad primam superficiem debet pro secunda assumi $\frac{1}{m}$: adeoque sinus anguli incidentiæ pro prima superficie multiplicandus erit per $\frac{1}{m}$ ad habendum sinum anguli refracti, & pro secunda superficie per m.

9. Cavendum etiam demum, ut valor m assumatur is, qui convenit singulis radiis, & substantiis singularum lentium. Adhibendi erunt quatuor diversi valores m, bini pro primo rubeo, & postremo violaceo respectu vitri communis lentis primæ, & tertiæ, ac alii bini pro iisdem respectu flint lentis intermediæ ap-

appellabimus autem m' cum accentu, ut in omnibus præcedentibus valores, qui pertinent ad lentem e flint: si adesset tertia substantia; pro ea adhiberetur m''. Ii valores debent inveniri respectu vitrorum adhibendorum methodo paragraphi IX Opusculi I.

10. Per hasce methodos invenientur quatuor distantiæ superficiei postremæ a concursu cum axe radii primi rubei infinite proximi axi ipsi, postremi violacei itidem infinite proximi, primi rubei incidentis in marginem aperturæ, postremi violacei incidentis in eundem. Differentia primæ a secunda, & tertiæ a quarta exhibebit errorem residuum refrangibilitatis: differentia primæ a tertia, & secundæ a quarta exhibebit errorem residuum sphæricitatis. Etiam ubi agatur de objectivo composito e binis tantum lentibus, poterit addi distantia ejusdem superficiei a concursu radii refrangibilitatis mediæ incidentis in punctum medium inter centrum, & marginem aperturæ, quæ erit quinta: ejus differentia a reliquis pertinebit ad eadem errorum genera. Methodus, quæ omnes simul tollat eas differentias inducendo æqualitatem omnium earum distantiarum, corriget utrumque genus erroris.

11. Ea methodus huc reducetur. Excessus primæ ex iis quinque distantiis supra secundam dicatur e, supra tertiam e', supra quartam e'', supra quintam e''', qui valores assumendi erunt pro negativis, si pro excessu habeatur defectus: augeantur, alter post alterum, per exiguam quantitatem singuli e quatuor radiis sphæricitatis, & determinentur novæ distantiæ superficiei ultimæ a concursu novo cum axe ita, ut dum fit calculus pro unaquavis mutatione, valores reliquorum trium radiorum adhibeantur iidem, qui habebantur ante omnem mutationem: assumptis novis excessibus primæ novæ distantiæ supra reliquas, notetur singulorum e quatuor erroribus e, e', e'', e''' diminutio, cujus valor habeatur pro negativo, si pro diminutione obveniat augmentum. Habebuntur pro quovis errore quatuor diminutiones ortæ ex uno quovis augmento radii: appellentur x, x', x'', x''' augmenta singulorum e quatuor radiis, quæ simul adhibita debeant destruere omnes illos errores e, e', e'', e'''. Pro singulis ex hisce mutationibus habebitur analytice expressio diminutionis inducenda in singulis erro-

rori-

roribus, quæ erit quarta proportionalis post augmentum adhibitum, diminutionem inde ortam, & novum augmentum faciendum expressum per suum x. Obtinebuntur hoc pacto quatuor diminutiones erroris e inducendæ per x, x', x'', x''', quarum summa exhibebit unam æquationem destruentem e: summa quatuor diminutionum erroris e' expressarum eodem modo, exhibebit alteram æquationem, ac eodem pacto obtinebitur tertia, & quarta. Eæ cum sint totidem, quot incognitæ x, & omnes primi gradus, determinabunt methodo cognita omnes quatuor valores x, atque id minus difficulter, si loco formularum generalium eruantur singuli coefficientes numerici singulorum terminorum in æquationibus, quæ obtinentur novæ, dum eliminatis aliis post alios valoribus x, x', x'' minuitur ipsarum æquationum numerus.

12. Inventis valoribus x, x', x'', x''', singuli additi suis sphæricitatum radiis, vel si obvenerint negativi, inde ablati, exhibebunt novos radios: ii deberent destruere simul omnes illos errores, quorum si singuli destruerentur per unicam positionem more solito; fieri posset, ut uno destructo alii augerentur. Calculus restitutus cum hisce novis radiis ostendet, an reipsa destructi sint, vel, siquid remanet, quantum id sit, ut eâdem operatione restitutâ obveniat correctio accuratior.

13. Cum in objectivo composito e tribus lentibus habeantur sex radii sphæricitatum, poterunt fieri sex mutationes x, quæ exhibeant sex æquationes destruentes sex differentias distantiarum septem concursuum cum axe a postrema lente, unde obveniet conjunctio radiorum septem. Possunt pro iis adhiberi tria binaria radiorum lucis extremorum incidentium prope centrum, in medio inter centrum, & marginem aperturæ, atque in marginem ipsum: pro iis satis sunt mutationes radiorum sphæricitatis quinque, quæ destruant quinque differentias distantiæ concursus primi a reliquis quinque distantiis reliquorum concursuum. Si tertia lens sit ex tertio genere substantiæ idoneæ ad uniendos tres colores; poterunt adhiberi omnes sex mutationes pro distantiis concursuum cum axe pertinentium ad duo ternaria colorum primi rubei, medii viridis, & postremi violacei, incidentium prope centrum, & in

mar-

marginem aperturæ, cum radio mediæ refrangibilitatis incidente in punctum medium inter centrum, & marginem.

14. Apposui pro conditione tertium genus substantiæ idoneæ ad uniendos colores tres; nam, ut jam toties innui, per duas substantias conjungi non possunt nisi colores bini, quòd patet ex illa formula prima numeri 16 capitis II Opusculi II, ex qua habetur $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm}{f''} = 0$, adeoque $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times (\frac{1}{f} + \frac{1}{f''})$ $= -u(\frac{1}{f} + \frac{1}{f''})$. Si hic valor $\frac{dm}{dm'}$ pertineat, uti est assumptus, ad comparationem primi rubei cum postremo violaceo, & appellato u' valore ejusmodi fractionis pertinente ad primum rubeum cum dato quopiam ex intermediis, per easdem tres lentes uniendi essent omnes tres ii colores; deberet etiam esse idem valor $\frac{1}{f'} = -u'(\frac{1}{f} + \frac{1}{f''})$, adeoque $u = u'$: cum igitur ii valores non sint æquales, ut demonstravimus in Opusculo I per inversionem successivam spectri; non potest per solas duas substantias fieri unio trium, nisi habeatur tertia substantia, quæ exhibeat $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm''}{f''} = 0$, unde eruantur formulæ, quas adhibuimus in superiore supplemento.

15. Hinc si per regulam superiorem erutam e methodo falsæ positionis quæratur destructio inæqualitatum pertinentium ad tres colores; nihil obtinebitur. Correctiones inventæ per illas æquationes nec corrigent immediate differentias ipsas post primam operationem, nec exhibebunt seriem correctionum sibi succedentium convergentem usque ad correctionem totalem: & quidem id accidit semper etiam in methodo communi falsæ positionis, in qua quæritur correctio unius erroris per unicam mutationem. Si agatur de binis quantitatibus inter se connexis, & quæratur valor secundæ respondens cuidam valori primæ, quem ipsa habere non possit; error valoris hujus eruti e diversis positionibus illius destrui omnino non potest: oritur series positionum, quæ non convergit: error habetur semper, immo etiam aliquando crescit. Methodus falsæ positionis supponit differentias proxime propor-

tio-

tionales quantitatum, quarum altera quæritur per alteram: eæ differentiæ fere semper sunt proxime proportionales; si valor quæsitus est satis remotus a suo maximo, vel minimo: sed in vicinia maximi, vel minimi deest ea proportionalitas, quæ est fundamentum ejus methodi: eo casu non potest obtineri totalis destructio erroris, sed illud tantummodo, ut inveniatur ejus minimum, quod obtinetur methodo generali interpolationum. Verum hæc pertinentia ad eas methodos & multo prolixiora sunt, quam ut hìc paucis exponi possint, & ita pertinent ad elementa, non illa quidem prima, & simplicia, sed nec nimis sublimia, ut idcirco satis sint cognita.

16. Illud huc pertinet, quod certa sit spes optimi exitus, in applicatione methodi hìc adhibitæ ad combinationes, quas pro destructione totali exhibuerint formulæ erutæ ex contemptu quantitatum ordinis inferioris, & ita exhibuerint, ut in æquatione secundi gradus valor inclusus signo radicali non solum non sit negativus, quo casu ipsæ non exhibent nisi appulsum ad errorem minimum, sed nec sit positivus exiguus, quo casu valor radicis exhibentis destructionem ita distat ab imaginarietate, ut exiguæ mutationes inductæ ad corrigendum exiguum errorem residuum ortum ex contemptu quantitatum illarum ordinis inferioris, non debeant inducere impossibilitatem destructionis totalis respondentem imaginarietati radicis extrahendæ a quantitate negativa. Cum ea spe progrediemur jam ad methodos indicatas pro inventione distantiarum illarum superficiei postremæ a concursu cum axe radii inde egressi, incipiendo a radiis infinite proximis ipsi axi.

§. II.

Determinatio distantiæ superficiei sphæricæ a puncto, in quo concurrit cum axe communi pluribus superficiebus radius delatus ad primam cum directione parallela eidem axi, & ipsi infinite proxima, refractus in transitu per earum singulas.

17. FORMULA inventa numero 41 capitis I hujus Opusculi II est $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, ubi, ut innuimus num. 2, est a radius

sphæricitatis positivus, vel negativus, prout centrum jacet citra superficiem, vel ultra respectu radiorum advenientium; p est distantia superficiei a puncto dirigente radium incidentem positiva, vel negativa, prout ii convergunt, vel divergunt, nimirum prout id punctum jacet itidem citra, vel ultra superficiem: q est distantia ejusdem superficiei a puncto dirigente radios refractos, quod jacebit ultra, vel citra, prout is valor obvenerit positivus, vel negativus, radio refracto convergente respectu axis in primo casu, divergente in secundo: valor, qui pro prima superficie cujusvis lentis est is, qui inventus est methodo paragraphi IX Opusculi I, evadit $\frac{1}{m}$ pro secunda: radius a erit positivus; si superficies prima lentis cujusvis est convexa, vel secunda concava: erit negativus; si illa est concava, vel hæc convexa. Pro casu autem radiorum advenientium ad primam superficiem e longinquo ita, ut haberi possint pro parallelis axi, valor p evadit infinitus, & $\frac{1}{p} = 0$.

18. Hinc pro prima superficie primæ lentis habebitur $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, & $q = \frac{ma}{m-1}$, ubi & a, & q erunt valores positivi: pro secunda autem superficie tam ejus, quam omnium lentium sequentium, posito $\frac{1}{m}$ pro m, habebitur $m(\frac{1}{m}-1) = -(m-1)$ pro $\frac{m-1}{m}$. Quod si crassitudo lentis cujusvis dicatur c, & radius sphæricitatis secundæ superficiei b, ac ejus valoribus p, & q addantur accentus; habebuntur pro quavis lente sequentes tres formulæ

I. Pro prima superficie . . . . $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$

II. Pro transitu a prima ad secundam $p' = q - c$

III. Pro secunda superficie . . . . . . $\frac{1}{q'} = -\frac{m-1}{b} + \frac{m}{p'}$.

19. Incipiendo a prima superficie primæ lentis evanescet, ut diximus, $\frac{1}{p}$, & habebitur $q = \frac{ma}{m-1}$: tum secunda formula exhibebit

bebit p', cujus eruetur e tabulis complementum logarithmicum; quod habebit pro numero valorem $\frac{1}{p'}$: logarithmus valoris $m-1$ cum complementis logarithmicis valorum m, & b, exhibebunt numerum conjungendum cum numero invento pro $\frac{1}{p'}$ per additionem, vel subtractionem, prout signa valorum b, & p' fuerint difformia, vel conformia, nam valor $-\frac{m-1}{mb}$ habebit signum contrarium signo valoris b. In prima lente valor p' erit semper positivus; si prima superficies fuerit convexa, quod assumpsimus semper in omnibus casibus evolutis, existente idcirco a positivo, adeoque adhibenda erit additio, vel subtractio, prout secunda superficies fuerit convexa, vel concava, habuimus autem semper convexam etiam ipsam: crassitudo c imminuet ibi valorem positivum q ad habendum p', qui tamen valor remanebit positivus ob crassitudinem semper exiguam.

20. Transeundo ad secundam lentem, ejus valor p erit semper idem, ac valor q' præcedentis, cum posuerimus semper lentes contiguas: atque idem præstandum erit etiam in transitu a secunda lente ad tertiam; si agatur de errore objectivi compositi e tribus lentibus. Etiam, si agatur de quocumque numero lentium contiguarum, semper valor q' præcedentis erit assumendus pro valore p sequentis, qui idcirco habebit idem signum, quod acquisiverit in calculo præcedente. Semper crassitudo c habebit signum positivum, adeoque minuet valorem q', si hic fuerit positivus; augebit, si negativus.

21. Calculus absolvetur facile per logarithmos. Pro quavis superficie prima habebitur valor numericus $\frac{m-1}{ma}$ per logarithmum valoris $m-1$, & complementa logarithmica valorum m, & a: eruetur valor numericus $\frac{1}{p}$ per complementum logarithmicum valoris p, inventi ex præcedenti q': per summam, vel differentiam numerorum inventorum habebitur numerus $=\frac{1}{q}$: hujus comple-

 men-

mentum logarithmicum exhibebit q, ex quo, & valore c obtinebitur itidem per summam, vel differentiam valor $p' = q - c$. Pro quavis superficie secunda habebitur primus terminus $-\frac{m-1}{b}$ per præcedentem logarithmum eundem valoris $m-1$, & novum complementum logarithmicum valoris b : is cum valore $\frac{1}{mp}$, eruto e complemento logarithmico valoris p' inventi, & logarithmo valoris m exhibebit secundum terminum valoris $\frac{1}{q}$, adhibendi in calculo sequenti pro valore $\frac{1}{p}$ sine novo transitu a numeris ad logarithmos, & ab his ad illos. Valor q' eruendus e complemento logarithmico valoris $\frac{1}{q}$, non erit necessarius, nisi pro formula applicata postremæ superficiei, vel pro distinguenda specie figuræ adhibenda in solutione altera, quæ adhibet Trigonometriam.

22. Patet progressus calculi non nimis prolixus : cavendum tantummodo, ut adhibeatur pro quovis genere colorum suus valor m, & pro quavis lente is, qui pertinet ad ejus substantiam, posito suo diverso a priore pro lente secunda, quæ est ex flint. Hi valores non sunt illi, qui adhibiti sunt pro m, & m' in calculis capitis IV hujus Opusculi : illi erant medii inter valores inventos pro rubeis, & violaceis : hi autem sunt ipsi inventi seorsum pro singulis. Valores illi medii m, & m' adhiberi poterunt pro unione coloris mediæ refrangibilitatis incidentis in punctum medium inter centrum aperturæ, & marginem, cujus unionem proposuimus addendam reliquis numero 10, & 13; licet loco ipsius poterit etiam adhiberi valor pertinens ad alterutrum ex extremis incidentem in illud punctum, cum utrumvis conducat ad unionem aliquanto majorem, neutrum efficiat unionem perfectam, quæ haberi non potest, nisi per illam continuam mutationem inductam in progressu stratorum, quam Divinus Naturæ auctor induxerit in formatione humorum oculi juxta id, quod exposuimus initio supplementi præcedentis.

23. Cæterum vel ex hoc usu pro corrigendo errore residuo, qui

qui plurimum conferre debet ad perficienda magis objectiva acromatica, satis luculenter patet, quam sint utiles methodi, quas in Opusculo I proposuimus, pro determinando valore *m* pertinente ad colores extremos, & ad quemcumque ex intermediis in substantiis singulis, atque id ita, ut iidem prorsus assumantur, dum ab una substantia transitur ad aliam, & quantum præstent eædem methodi illis, quæ exhibent tantummodo refractionem mediam, quam nonnulli, ut alibi monuimus, male appellant refractionem radii albi, quæ nimirum est multiplex, non unica. Per hasce solas singularum specierum determinationes distinctas haberi possunt elementa necessaria pro computando errore residuo, &, quantum per duas, vel tres substantias licet, corrigendo.

§. III.

Applicatio Trigonometriæ ad concursum cum axe radiorum incidentium in data quapiam distantia a centro aperturæ.

24. Proposuimus pro hac applicatione (num. 4) problemata, quæ hic evolvemus exhibendo solutionem eorum, quæ pertinent ad diversos casus ibidem indicatos; incipiemus autem a radio, qui adveniat parallelus axi, uti censetur is, qui defertur ad lentem primam. In omnibus objectivis, pro quibus evoluta sunt systemata sphæricitatum in Opusculo II, & ejus supplemento I, superficies prima lentis primæ est convexa. Idcirco hic assumemus in problemate I superficiem convexam, & primam lentis, cui convenit ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti *m* ad 1. Si prima superficies primæ lentis esset plana; radius adveniret parallelus axi ad secundam, in qua ratio sinus incidentiæ ad sinum anguli refracti esset e contrario 1 ad *m*. Potest radius adveniens ad superficiem parallelus axi invenire ipsam vel primam lentis, vel secundam, & vel convexam, vel concavam. Sic haberentur casus quatuor, quorum singuli evolvi possent seorsum eodem modo, quo evolvetur hic primus, qui cum solus occurrat in iis systematis, solus est hic præmissus. Is est quidam veluti

casus

casus particularis subalternus pertinens ad primum ex octo casibus, quos proponemus pertinentes ad problema II generale: sic & reliqui tres pertinent ad aliquem ex iisdem. Eos evolvemus in evolutione eorundem octo casuum. Incipiemus autem a problemate pertinente ad radium, qui adveniat parallelus axi, & inveniat primam superficiem lentis convexam.

PROBLEMA I.

25. Datâ distantiâ ab axe puncti superficiei sphæricæ, quæ sit prima lentis cujuspiam, & convexa, in quod incidat radius parallelus ipsi axi, cum radio sphæricitatis, & ratione sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti, invenire distantiam puncti dirigentis radium refractum ab ipsa superficie, & angulum, quem ejus directio continet cum ipso axe.

26. Transeat (fig. 1 Tab. XI) axis MM' per centrum C ejus superficiei, cui occurrat ipse quidem in A, radius autem luminis delatus ex parte M directione BD in E. Is loco progressùs rectilinei per ED, detorquebitur accedendo ad radium sphæricitatis EC perpendicularem ipsi superficiei, ut figura exhibet; si medium, in quod transit, habet vim refractivam majorem vi medii præcedentis, uti accidit in appulsu ex aere in primam superficiem objectivi propositi, ubi sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti est ut m ad 1: directio autem, per quam refringitur, occurret ipsi axi ex parte AM' ultra C in quodam puncto F, quod erit punctum dirigens radium refractum. Concipiatur radius sphæricitatis CE productus in G, & recta EH sit perpendicularis axi. Dabitur radius AC = CE, recta EH, & ratio sinuum m: quæritur angulus AFE cum distantia AF.

27. Radii sphæricitatum dabuntur e systemate sphæricitatum eruto pro objectivo proposito per calculos applicatos formulis, valor m ex natura vitri, & radii juxta num. 9. Recta EH pro prima superficie erit dimidia apertura ipsius objectivi, si agatur de radio adveniente ad ejus marginem, vel alia distantia a centro aperturæ assumpta. Si agatur de hoc casu pro radio, qui adve-

niat

niat parallelus axi post egressum e quapiam superficie præcedente ; ipsa recta EH habebitur ex evolutione casus pertinentis ad eam superficiem , qui erit unus e pertinentibus ad problema generale II , ubi patebit methodus pro ea eruenda . Sed casus parallelismi unicus inter infinitos divergentiæ , & convergentiæ , non obveniet , nisi consultò seligatur , ut hic pro superficie prima primæ lentis convexa , vel pro secunda lentis primæ habentis primam planam .

28. Angulus incidentiæ erit GEB æqualis interno , & opposito ACE , cujus sinus est $\frac{EH}{CE} = \frac{EH}{AC}$: angulus autem refractus erit CEF, adeoque habebitur ejus sinus $= \frac{1}{m} \times sin.ACE$. Inde profluet angulus $AFE = ACE - CEF$: tum $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, ac demum distantia superficiei a concursu F, nimirum $AF = AC + CF$.

PROBLEMA II.

29. Datâ distantiâ puncti dirigentis radium incidentem in superficiem sphæricam ab ipsa superficie, ~~angulo~~, quem directio ejus radii continet cum axe , & radio sphæricitatis , invenire distantiam puncti dirigentis radium refractum ab ipsa superficie , & angulum , quem ejus directio continet cum ipso axe .

30. Ingens est multitudo casuum , qui possunt occurrere : eos reducemus ad 8 ortos ex tribus binariis conditionum : quod superficies proposita sit prima lentis cujuspiam , vel secunda : quod eadem sit convexa , vel concava : quod radius adveniat ad ipsam per directionem convergentem cum axe , vel divergentem . Orientur aliæ subdivisiones e positione puncti dirigentis radium incidentem siti intra radium sphæricitatis , vel extra , ut etiam ex convergentia directionis radii refracti cum axe , vel divergentia . Habentur & aliæ subdivisiones , ex recessu in infinitum seu centri sphæricitatis , quod accidit, ubi superficies sit plana , vel puncti dirigentis radium incidentem , aut refractum , factâ parallelâ axi

axi directione utriusque. Incipiemus a primis quatuor, in quibus superficies sit prima lentis cujuspiam, quod requirit multiplicationem sinus anguli incidentiæ per fractionem $\frac{1}{m}$ ad habendum sinum anguli refracti, dum in quatuor reliquis, in quibus superficies erit secunda, idem multiplicandus erit per *m*.

CASUS I.

31. *Superficies lentis prima, & convexa: directio radii incidentis convergens.*

32. Occurrit subdivisio in duos, qui ambo exprimuntur in figura 2. Vel enim punctum dirigens D, ad quod tendit radius incidens BE jacebit inter A, & C, vel ultra C in D'. Angulus incidentiæ erit GEB = CED, vel GEB' = CED', angulus refractus CEF, vel CEF', cadente F inter puncta C, & D, vel F' inter C, & D', ob accessum rectæ EF, vel EF' ad perpendiculum EC. Datur radius AC = CE, distantia AD, vel AD': & angulus ADE, vel AD'E (*): quæritur distantia AF, & angulus AFE, vel AF', & AF'E. Porro eadem erunt data, & quæsita in omnibus casibus sequentibus.

33. In priore casu erit $CD = AC - AD$, $sin.GEB = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$ (**), $ACE = ADE - CED$, $sin.CEF = \frac{1}{m} \times sin.CED$, $AFE = ACE + CEF$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = AC - CF$.

34. In casu posteriore erit $CD' = AD' - AC$, $sin.GEB' =$ *sin.*

(*) Inter data habetur semper etiam valor *m*.

(**) Substituitur sinui anguli CDE sinus ejus supplementi, qui ipsi æquatur, quod fiet etiam substituendo angulo cuipiam eum, qui sit ipsi oppositus ad verticem, ut etiam expressioni anguli cujuspiam per quasdam litteras expressionem ejusdem per alias, quæ pro ipso adhibitæ sint, ubi is enunciatur datus, vel inventus, positas in eodem latere. Ea hic semel monuisse sit satis.

$sin.CED' = \frac{CD' \times sin.CD'E}{CE} = \frac{CD' \times sin.AD'E}{AC}$, $ACE = AD'E + CED'$, $sin.CEF' = \frac{1}{m} \times sin.CED'$, $AF'E = ACE - CEF'$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.CEF'}{sin.AF'E}$, $AF' = AC + CF'$.

35. Si centrum C abeat in infinitum, superficie factâ planâ; angulus incidentiæ GEB evadit æqualis angulo dato ADE, & angulus refractus CEF angulo AFE. Hinc habetur $sin.AFE = \frac{1}{m} \times sin.ADE$. Cum vero ob angulum ad A in eo casu rectilineum rectum sit $AE = AD \times tan.ADE$, & $= AF \times tan.AFE$, erit $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$.

36. Si punctum D abeat in C; abibit eodem, & punctum F, ac radius progredietur rectà sine ulla refractione. Si autem punctum D' abeat in infinitum; casus abit in illum problematis I (num. 25).

CASUS II.

37. *Superficies prima, & convexa: directio radii incidentis divergens.*

38. Hic itidem occurrit subdivisio in duos casus subalternos expressos in fig. 3. Jacebit D citra superficiem, sed punctum dirigens radium refractum poterit cadere vel ex parte AM' in F, vel ex parte AM in F'. Positis B, *f* in productione rectarum DE, F'E, erit pro utroque casu angulus incidentiæ $GED = CEB$: tum habebitur angulus refractus ex suo sinu, cujus anguli magnitudo distinguet eos binos casus subalternos. Habebitur F, si angulus refractus obveniat minor angulo ACE; F', si is obveniat major.

39. Pro utroque casu erit $CD = AC + AD$, $sin.GED = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = GED - ADE$: sinus anguli refracti erit $\frac{1}{m} \times sin.GED$. Is angulus in

casu priore erit CEF: tum habebitur ibi $AFE = ACE - CEF$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = AC + CF$. In casu posteriore is angulus erit $CEf = GEF'$: tum habebitur $AF'E = GEF' - ACE$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.GEF'}{sin.AF'E}$, $AF' = CF' - AC$.

40. Si punctum D abeat in infinitum; redit idem casus radii advenientis ad superficiem lentis primam, & convexam cum directione parallela axi, ut num. 36, cujus evolutio habetur in problemate I num. 25. Quod si angulus refractus, qui erat CEF casus prioris, CE*f* posterioris, obveniat = ACE; radius refractus evadet parallelus axi, evanescente ibi angulo AFE, hic AF'E, & punctis F, F' abeuntibus in infinitum: tum pro distantia AF, vel AF', & angulo AFE, vel AF'E assumetur recta EH perpendicularis axi adhibenda pro casu superficiei sequentis. Erit autem ipsa $EH = CE \times sin.ACE = AC \times sin.ACE$, qui valor ita inveniri debebit, quotiescumque in sequentibus casibus occurrat parallelismus radii refracti.

41. Si autem superficies sit plana; puncto C abeunte in infinitum, evadet etiam hic, ut num. 35, angulus incidentiæ GED æqualis angulo dato ADE, & angulus refractus CE*f* æqualis angulo AF'E, adeoque $sin.AF'E = \frac{1}{m} \times sin.ADE$: tum $AE = AD \times tan.ADE$, & $= AF' \times tan.AF'E$, adeoque $AF' = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AF'E}$.

CASUS III.

42. *Superficies prima, & concava: directio radii incidentis convergens.*

43. Hic itidem habetur subdivisio similis præcedenti in duos casus subalternos expressos in fig. 4. Jacet C ex parte AM, D ex parte AM': angulus incidentiæ pro utroque erit CEB: tum habebitur angulus refractus ex suo sinu: hujus magnitudo distin-

guet

guet binos casus subalternos pro F , vel F'. Si angulus refractus obveniat major angulo ACE ; habebitur F ex parte AM' : si autem is obvenerit minor ; habebitur F' ex parte AM .

44. Pro utroque casu erit $CD = AC + AD$, $sin.CEB = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = CEB - ADE$: sinus anguli refracti erit $\frac{1}{m} \times sin.CEB$. Is in priore casu erit $sin.GEF$: tum habebitur ibi $AFE = GEF - ACE$, $CF = \frac{CE \times CEF}{CFE} = \frac{AC \times sin.GEF}{sin.AFE}$, $AF = CF - AC$. In casu posteriore is erit $sin.GEf = sin.CEF'$: tum habebitur $AF'E = ACE - CEF'$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.CEF'}{sin.AF'E}$, $AF' = AC + CF'$.

45. Si angulus refractus , qui erat GEF casus prioris , GEf posterioris obveniat = ACE ; radius refractus evadet parallelus axi , evanescente ibi angulo AFE , hic AF'E , & punctis F , F' abeuntibus in infinitum . Tum pro distantia AF , vel AF', & angulo ad F , vel F' assumendus erit , ut num. 40 , valor distantiæ $EH = CE \times sin.ACE = AC \times sin.ACE$.

46. Si autem superficies sit plana ; puncto C abeunte in infinitum , redit , ut num. 35 , & 41 , $sin.AFE = \frac{1}{m} \times sin.ADE$, & $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$.

47. Quod si punctum D abeat in infinitum , radio adveniente parallelo axi ad superficiem lentis primam concavam ; habebitur EH juxta adnotationem ad num. 36 , & numerum 40 . Inde eruetur $sin.ACE = \frac{EH}{CE}$, cui tum erit æqualis angulus incidentiæ CEB , adeoque habebitur sinus anguli refracti $GEf = sin.CEF' = \frac{1}{m} \times sin.ACE$: tum $AF'E = ACE - CEF'$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.CEF'}{sin.AF'E}$, & $AF' = AC + CF'$.

CASUS IV.

48. *Superficies prima, & concava: directio radii incidentis divergens.*

49. In hoc casu (fig. 5) jacebit citra superficiem tam centrum C, quam punctum dirigens radium incidentem, quod exhibebit subdivisionem in duos subalternos, ut in fig. 2, cum hic posterior possit cadere vel intra radium AC in D, vel citra C in D'. Angulus incidentiæ erit CED, vel CED', angulus refractus GEf, vel GEf', cadente F inter A, & C, vel F' citra C ob accessum rectæ Ef, vel Ef' ad perpendiculum EG.

50. In priore casu erit $CD = AC - AD$, $sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = ADE - CED$, $sin.CEf = sin.GEf = \frac{1}{m} \times sin.CED$, $AFE = ACE + CEF$, $AF = AC - CF$.

51. In casu posteriore erit $CD' = AD' - AC$, $sin.CED' = \frac{CD' \times sin.CD'E}{CE} = \frac{CD' \times sin.AD'E}{AC}$, $ACE = AD'E + CED'$, $sin.CEF' = sin.GEf' = \frac{1}{m} \times sin.CED'$, $AF'E = ACE - CEF'$, $AF' = AC + CF'$.

52. Si centrum C abeat in infinitum, superficie factâ planâ; angulus incidentiæ CED evadit æqualis angulo dato ADE, & angulus refractus GEf angulo AFE. Hinc habetur $sin.AFE = \frac{1}{m} \times sin.ADE$, & ob angulum rectum in A evadit $AE = AD \times tan.ADE$, & $= AF \times tan.AFE$, adeoque $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$.

53. Si punctum D abeat in C; eodem abibit, & punctum F, ac radius progredietur sine ulla refractione. Si autem punctum D abeat in infinitum; casus abit in illum, quem evolvimus numero 47, in quo radius advenit parallelus axi ad superficiem lentis primam concavam.

54. Quæ

54. Quæ habentur hìc pro hoc casu, sunt fere eadem, & fere semper iisdem verbis, ac in casu I, mutatis tantummodo nonnullis e litteris, quæ jacent in iisdem lineis ad alteram partem puncti E, in eas, quæ jacent ad alteram oppositam. In sequentibus quatuor casibus multiplicationi per fractionem $\frac{1}{m}$ succedet multiplicatio per m ob accessum ad perpendiculum mutatum in recessum.

CASUS V.

55. *Superficies lentis secunda, & convexa: directio radii incidentis convergens.*

56. Hìc habetur in figura *6* unicum punctum D positum ultra superficiem cum puncto C citra, & unico puncto F ultra. Angulus incidentiæ erit $CEB = GED$, angulus refractus GEF major. Habebitur $CD = AC + AD$, $sin.CEB = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = CEB - ADE$, $sin.GEF = m\,sin.CEB$, $AFE = GEF - ACE$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.GEF}{sin.AFE}$, $AF = CF - AC$.

57. Si superficies sit plana; centro C abeunte in infinitum, ut num. 35, 40, 45, habebitur itidem $AFE = m\,sin.ADE$, ob æqualitatem eorum angulorum cum angulo refracto GEF, & angulo incidentiæ CEB: tum ob angulum ad A evadentem eo casu rectilineum rectum erit $AE = AD \times tan.ADE$, & $= AF \times tan.AFE$, adeoque $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$.

58. Si punctum D abeat in infinitum; habetur casus radii advenientis paralleli axi ad superficiem lentis secundam convexam; in quo habebitur EH valor assumptus, vel erutus ex evolutione casus superficiei præcedentis, adeoque $sin.ACE = \frac{EH}{CE} = \frac{EH}{AC}$, cui angulo erit æqualis angulus incidentiæ CEB, adeoque $sin.GEF$

=

$= m\,sin.ACE$, $AFE = GEF - ACE$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE}$ $= \frac{AC \times sin.GEF}{sin.AFE}$, $AF = CF - AC$.

CASUS VI.

59. *Superficies lentis secunda, & convexa: directio radii incidentis divergens.*

60. Redit in fig. 7, ut in casu I in fig. 2, subdivisio in casus duos ex positione puncti dirigentis radium directum incidentem. Cum enim etiam punctum C jaceat citra; potest illud cadere vel inter A, & C in D, vel etiam citra C in D'. Prima ejus positio habet suum punctum dirigens radium refractum in F inter A, & D, secunda citra D' in F', quod potest etiam abire ultra ipsam superficiem in F'' ad partes AM'. Angulus incidentiæ erit CED, vel CED': angulus refractus prioris $GEf = CEF$, posterioris $GEf' = CEF'$, vel etiam GEF''.

61. Erit in casu priore $CD = AC - AD$, $sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$: tum $ACE = ADE - CED$, $sin.CEF = sin.GEf = m\,sin.CED$, $AFE = ACE + CEF$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = AC - CF$.

62. In casu posteriore $CD' = AD' - AC$, $sin.CED' = \frac{CD' \times sin.CD'E}{CE} = \frac{CD' \times sin.AD'E}{AC}$, $ACE = AD'E + CED'$: tum sinus anguli refracti $= m\,sin.CED'$: si angulus acutus habens eum sinum obveniat minor angulo ACE; habebitur punctum F': si major, punctum F''. In priore ex hisce binis casibus erit $sin.GEf'$ $= sin.CEF' = m\,sin.CED'$, $AF'E = ACE - CEF'$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.CEF'}{sin.AF'E}$, $AF' = AC + CF'$. In posteriore ex iisdem binis erit $sin.GEF'' = m\,sin.CED'$, $AF''E$ $= GEF'' - ACE$, $CF'' = \frac{CE \times sin.CEF''}{sin.CF''E} = \frac{AC \times sin.GEF''}{sin.AF''E}$, $AF'' = CF'' - CA$.

63. Si

63. Si angulus acutus, cujus sinus $= m\,sin.CED'$ obveniat æqualis angulo ACE; radius refractus erit parallelus axi, evanescentibus angulis AF'E, AF''E, & punctis F', F'' abeuntibus in infinitum: tum pro distantia AF', vel AF'', & angulo AF'E, vel AF''E assumenda erit in usum superficiei sequentis, ut numeris 40, & 45, $EH = CE \times sin.ACE = AC \times sin.ACE$.

64. Si centrum C abeat in infinitum superficie evadente plana; angulus incidentiæ CED evadit $= ADE$, & refractus CEF angulo AFE, adeoque $sin.AFE = m\,sin.ADE$: tum $AE = AD \times tan.ADE$, & $= AF \times tan.AFE$, adeoque $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$, ut num. 35, 41, 46.

65. Si punctum D abeat in C; abibit eodem & punctum F, ut num. 36, ac radius progredietur sine ulla refractione. Si autem punctum D' abeat in infinitum; habebitur casus radii advenientis paralleli ad superficiem secundam convexam cum puncto F'' posito ultra superficiem. Tum erit opus rectâ EH perpendiculari ad axem assumptâ pro lente plano-convexa obvertente planum radio incidenti, vel exhibitâ a superficie præcedente, juxta numerum 27, ut num. 40. Ejus ope habebitur $sin.ACE = \frac{EH}{EC} = \frac{EH}{AC}$, cui erit æqualis angulus incidentiæ CED', adeoque & sinus anguli refracti GEf, sive $CEF = m\,sin.ACE$, tum $AFE = ACE + CEF$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = AC - CF$.

CASUS VII.

66. Superficies lentis secunda & concava: directio radii incidentis convergens.

67. In hoc casu habebitur in fig. 8, ut in casu præcedente in fig. 7, subdivisio orta a positione puncti dirigentis radium incidentem. Id enim potest cadere ultra superficiem vel in D inter A, & C, vel in D' ultra ipsum punctum C, cum suis punctis F, F' cadentibus ad partes AM': accedet subdivisio casus poste-

rio-

rioris facta a puncto F''' cadente ad partes AM. Angulus incidentiæ pro casu priore erit GEB $=$ CED, pro posteriore GEB' $=$ CED'; angulus autem refractus pro priore CEF, pro posteriore CEF', vel CE*f*.

68. In priore casu erit $CD = AC - AD$, $sin.GEB = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = ADE - CED$, $sin.CEF = m\,sin.CED$, $AFE = ACE + CEF$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = AC - CF$.

69. In casu posteriore erit $CD' = AD' - AC$, $sin.GEB' = sin.CED' = \frac{CD' \times sin.CD'E}{CE} = \frac{CD' \times sin.AD'E}{AC}$, $ACE = AD'E + CED'$, sinus anguli refracti $= m\,sin.CED'$. Si angulus acutus respondens ei sinui fuerit minor angulo ACE; radius refractus dirigetur ad punctum F' positum ultra superficiem: si autem is angulus fuerit major; radius refractus diverget per directionem E*f* abeundo ad partes contrarias puncto F''' posito citra. In primo ex hisce binis casibus erit $sin.CEF' = m\,sin.CED'$, $AF'E = ACE - CEF'$, $CF' = \frac{CE \times sin.CEF'}{sin.CF'E} = \frac{AC \times sin.CEF'}{sin.AF'E}$, $AF' = AC + CF'$: in secundo erit $sin.CEf = sin.GEF''' = m\,sin.CED'$, $AF'''E = GEF''' - ACE$, $CF''' = \frac{CE \times sin.CEF'''}{sin.CF'''E} = \frac{AC \times sin.GEF'''}{sin.AF'''E}$, $AF''' = CF''' - AC$.

70. Si angulus refractus habens sinum $= m\,sin.CED'$ fuerit æqualis angulo ACE; radius refractus prodibit parallelus axi evanescentibus angulis AF'E, AF'''E, & punctis F', F''' abeuntibus in infinitum: tum pro distantia puncti dirigentis a superficie, & angulo ad F', vel F''' assumenda erit recta $EH = CE \times sin.ACE = AC \times sin.ACE$ adhibenda pro superficie sequenti, ut num. 40, 47, *63*.

71. Si centrum C abeat in infinitum, superficie factâ planâ; redit casus analogus casui numeri *64*. Fit $sin.AFE = m\,sin.ADE$, & $AF = \frac{AD \times tan.ADE}{tan.AFE}$.

72. Si

72. Si punctum D abeat in C; abibit eodem, ut num. 36, etiam punctum F', & radius progredietur sine ulla refractione. Si autem punctum D' abeat in infinitum; habebitur casus radii advenientis paralleli ad superficiem lentis secundam concavam cum puncto F'' posito citra superficiem. Opus erit recta EH, vel assumptâ, vel exhibitâ a superficie præcedente juxta numerum 27, ut num. 40, 58, 65. Ejus ope habebitur $sin.ACE = \frac{EH}{AC}$, cui erit æqualis sinus anguli incidentiæ GEB', adeoque sinus anguli refracti CE*f*, sive GEF'' erit $= m\,sin.ACE$: tum $AF''E = GEF'' - ACE$, $CF'' = \frac{CE \times sin.CEF''}{sin.CF''E} = \frac{AC \times sin.GEF''}{sin.AF''E}$, $AF'' = CF'' - AC$.

CASUS VIII.

73. *Superficies lentis secunda, & concava: directio radii incidentis divergens.*

74. Hic casus habet unicum punctum D citra superficiem in fig. 9, puncto C posito ultra, & unicum F citra. Angulus incidentiæ erit GED, refractus CE*f*. Habebitur $CD = AC + AD$, $sin.GED = sin.CED = \frac{CD \times sin.CDE}{CE} = \frac{CD \times sin.ADE}{AC}$, $ACE = GED - ADE$, $sin.CEf = sin.CEF = m\,sin.GED$, $AFE = GEF - ACE$, $CF = \frac{CE \times sin.CEF}{sin.CFE} = \frac{AC \times sin.CEF}{sin.AFE}$, $AF = CF - AC$.

75. Radius non poterit egredi per directionem parallelam axi, nec punctum D abire in C. Poterit punctum D, vel C abire in infinitum radio incidente cum parallelismo, vel superficie evadente planâ. Prior ex hisce binis casibus subalternis erit idem, ac num. 72: posterior erit idem, ac num. 64.

76. Hoc demum pacto evolvimus omnes octo casus pertinentes ad hoc problema generale, cum binis, ternis, vel etiam quaternis singulorum subdivisionibus. Quodcumque systema proponatur cujuscumque numeri lentium, quarum datæ sint vires per valo-

res *m* datos pertinentes ad singularum substantias relate ad genus datum radii colorati, & dentur radii sphæricitatum, semper poterit obtineri distantia ultimæ superficiei a puncto, in quo radius delatus directione parallela axi communi ad punctum primæ superficiei positum in data distantia ab ipso axe lentium quotcumque concurrit cum eodem axe post transitum per omnes ejusmodi lentes.

77. Invenietur per problema I sua distantia AF, & angulus AFE. Punctum F primæ superficiei evadet D superficiei secundæ, pro qua habebitur distantia AD, si a priore distantia AF dematur crassitudo lentis, vel ei addatur, prout punctum F jacuerit ultra lentem, vel citra: angulus autem ADE pro secunda superficie, erit idem, ac AFE pro prima, jacentibus punctis A earum superficierum in axe ad eandem partem respectu puncti F superficiei præcedentis, D sequentis, ob exiguam crassitudinem. Ex distantia AD, & positione ipsius respectu lentis, ac convexitate, vel concavitate superficiei sequentis patebit, ad quem ex postremis quatuor pertinebit is casus, adeoque poterit adhiberi una ex hisce octo figuris, vel delineari crasso modo alia analoga hisce hic propositis, & pertinens ad individuam ejus subdivisionem convenientem usque ad sinum anguli refracti: invento ejus angulo ex suo sinu, patebit, ad quam partem axis debebit cadere punctum F, & complebitur figura, cui conveniens invenietur angulus AFE, & distantia AF. Is angulus erit ADE pro prima superficie lentis secundæ: & distantia inventa AF erit nova AD sine ulla additione, aut subtractione, si lentes fuerint contiguæ. Innotescet autem ex positione puncti F præcedentis, ejus distantiâ a nova superficie, & curvaturâ superficiei novæ, ad quem e primis quatuor casibus res pertineat: adeoque delineari poterit figura eum casum exprimens usque ad inventionem anguli refracti, cujus determinatio ostendet, quo pacto figura compleri debeat. Eodem modo continuabitur operatio, inveniendo semper novum angulum ADE æqualem præcedenti AFE, & novam distantiam AD æqualem præcedenti AF pro quavis superficie lentis prima, & pro secunda æqualem ipsi auctæ, vel imminutæ per crassitudinem lentis, donec deveniatur ad egressum e postrema superficie,

cujus

cujus AF quæritur. Quanquam, ut supra etiam innuimus, & videbimus inferius, solutio habita pro radio infinite proximo axi proderit plurimum ad determinandum casum, & figuram adhibendam in antecessum.

78. Patet, posse iniri eodem pacto calculum etiam pro quavis distantia puncti, e quo radius primo prodit, assumendo ipsum punctum pro D, & inveniendo ejus distantiam a puncto E cum distantia EH puncti E ab axe: assumpto enim pro primo angulo ADE valorem ejus sinus $\frac{EH}{DE}$, habebitur initium calculi pro prima superficie: progressus erit idem, qui supra; & si radius egressus a postrema superficie debeat divergere; invenietur e postremo valore AF punctum axis, a quo is diverget. Si lentes habeant aliquam distantiam a se invicem; calculus iniri poterit eodem pacto addendo, vel demendo distantiam ipsam a præcedente AF in transitu ab una lente ad aliam, uti additur, vel demitur crassitudo in transitu a prima superficie ad secundam. Semper pro prima superficie lentis cujusvis adhibebitur applicatio solutionis pertinentis ad unum e primis quatuor casibus, & pro secunda solutio pertinens ad unum e quatuor postremis: semper in transitu a prima superficie ad secundam adhibebitur pro sequenti AD præcedens AF aucta, vel curtata per crassitudinem, & in transitu a lente præcedente ad sequentem ipsa nihil mutata, si habeatur contiguitas; aucta, vel imminuta per distantiam, siqua habeatur.

79. Præstabit autem e solutionibus propositis eruere progressum simplicem pertinentem ad valores datos pro quovis casu, & seriem inveniendorum, omissis omnibus, quæ ibi adjiciuntur ad demonstrandas solutiones, vel ad distinguendos casus subalternos, ne dum calculus arithmeticus instituitur, mens evagata facilius distrahatur ab opere illo prorsus materiali, & in errores subrepentes incurrat. Trademus ejus rei exemplum in sequenti paragrapho, proponendo progressum calculi instituendi pro objectivo composito e binis lentibus, quod invenimus in capite IV Opusculi II a num. 36.

§. IV.

Applicatio theoriæ præcedentis ad objectivum compositum e binis lentibus inventum primo loco in Opusculo II.

80. PROPOSITA est in loco citato ejus Opusculi determinatio objectivi compositi e duabus lentibus, quarum prima ex determinatione arbitrariâ assumpta est isoscelia utrinque convexa e vitro communi, secunda concava, & non isoscelia e flint. Tres valores, qui sunt fundamentum totius calculi habentur in ipso initio tabulæ numeri 26 capitis IV ejus Opusculi, ac sunt $m = 1,526$, pro flint $= 1,604$, ac logarithmus valoris $\frac{dm}{dm'}$ erat $9,782023$. Obvenerunt in tabula adnexa numero 37 valores $a = 0,3206$, $b = -0,3206$, $a' = -0,3201$, $b' = 1,533$. Nimirum obvenit fortuito tertius radius sphæricitatis fere æqualis prioribus binis. Focus autem objectivi compositi est unitas, cui debet inveniri æqualis distantia ultimi foci F ab objectivo ipso. Valor inclusus sub signo radicali pro eruenda radice erat satis magnus $= 0,4818$, adeoque æquatio ita distabat ab imaginarietate, ut omnino videatur haberi debere cum successu correctio erroris residui methodo proposita falsæ positionis: nec vero quidquam obstat exemplo methodi adhibendæ pro calculo numerico illa æqualitas superficiei tertiæ cum secunda.

81. Pro inveniendo errore residuo oportet juxta num. 9 habere quatuor valores m, duos priores pro incidentia radii primi rubei, & extremi violacei ex aere in vitrum commune, ex quo constat prima lens utrinque convexa, reliquos duos pro incidentia eorundem ex aere in vitrum flint. Hos habueram pro iis vitris $1,517$; $1,535$, & $1,589$; $1,619$. Valor $\frac{dm}{dm'}$ hinc erutus esset $\frac{18}{30}$, cujus logarithmus esset $1,255272 - 1,477121 = 9,778151$, non $9,782023$; sed discrimen oritur ex eo, quod logarithmus valoris $\frac{dm}{dm'}$ non est erutus ex hisce differentiis valorum m, quorum erro-

errores exigui respectu ipsorum reddunt nimis erroneam rationem differentiarum, ut monuimus in Opusculo I, sed ex inversione spectri, quæ immediate exhibet rationem differentiarum. Addendo ei logarithmo fractionis exhibito per inversionem spectri 9,782023 logarithmum valoris 0,030 = 8,477121, obtinetur 8,259144, quod exhibet $dm = 0,01816$ pro 0,018; unde patet, discrimen oriri a fractionibus ordinis inferioris, quæ contemptæ sunt in singulis operationibus, per quas deventum est ad habendos illos quatuor valores m, & ad valorem fractionum $\frac{dm}{dM}$, $\frac{dm'}{dM}$, in quibus M pertinet ad substantiam prismatis variabilis, & quarum prior divisa per posteriorem exhibuit valorem $\frac{dm}{dm'}$.

82. Oportet etiam habere aperturam objectivi, quæ in acromaticis habentibus distantiam focalem pedum trium commode adhibetur pollicum trium, adeoque potest ejus dimidium assumi pro $\frac{1}{24}$ distantiæ focalis assumptæ pro unitate. Tum oportet etiam habere crassitudinem singularum lentium in medio, ubi eæ intercipiunt partem axis, quæ determinari possunt per crassitudinem laminæ vitreæ adhibendæ: eam hic pro prima lente convexa objectivi pedum trium assumemus = 0,008, & pro secunda concava = 0,004. Cum ea longitudo contineat lineas $12 \times 36 = 432$, quæ sunt unitas hujus scalæ; prima crassitudo evadit $= 0,008 \times 432 = 3,446$, nimirum linearum $3.\frac{1}{2}$, quæ est satis magna ad excipiendas binas sagittas arcuum, cum satis magna crassitudine residua versus marginem ad soliditatem marginis ipsius, & ejus dimidium lineæ $1.\frac{3}{4}$ sufficit ad soliditatem in medio inter binas concavitates. Crassitudo adhuc aliquanto minor sufficeret: ea determinanda est ante institutionem calculi pro corrigendis radiis sphæricitatum exhibitis a calculo innixo formulis Opusculi II.

83. Cum hisce datis incipiendum est ab applicatione formularum numeri 18 ad radios, primum rubeum, & postremum violaceum, infinite proximos axi. Formula pro prima superficie e-

rat

rat $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, tum pro transitu ad secundam $p' = q - c$, & pro ipsa secunda $\frac{1}{q'} = -\frac{m-1}{b} + \frac{m}{p'}$; ubi q, & q' sunt distantiæ concursus cum axe a superficie prima, & secunda, qui inventi indicabunt, ad quem e casibus evolutis pro applicatione Trigonometriæ pertineat incursus in superficies sequentes, dum incursus in primam pertinet semper ad problema I (num. 25) radii advenientis cum directione parallela axi in fig. 1 (Tab. XI), sed solus valor secundus q' est distantia postremæ superficiei a concursu cum axe ipso, quæ hic quæritur.

84. Pro primo valore q evanescentia valoris $\frac{1}{p}$ ob parallelismum incidentiæ reddit expressionem simpliciorem $q = \frac{ma}{m-1}$. Pro reliquis habetur p sequens ex præcedente q dempto valore $c = 0{,}008$ a primo q ad habendum primum p', & valore $c' = 0{,}004$ a tertio q ad habendum postremum p'. Pro tertio p adhiberi debet valor secundus q, nimirum primus q' sine ulla additione ob contiguitatem. Singulæ formulæ exhibent valores fractionarios $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q'}$ per binos terminos fractionarios, ex quibus facile deducitur valor q, q', assumpto logarithmo, qui respondet numero provenienti a summa numerorum respondentium singulis fractionibus, cujus complementum arithmeticum exhibebit valorem ipsum q, q'. Quin immo pro tertia superficie nec est necessarius valor secundus e quatuor q, sive primus q', superficiei secundæ pro transitu ad tertiam, pro qua sufficit valor fractionarius $\frac{1}{q'}$, qui evadit $\frac{1}{p}$ pro ipsa superficie tertia, ubi is adhibetur fractionarius: sed præstabit invenire etiam ipsum ad videndum progressum calculi. In sequenti tabella habentur unico intuitu valores dati, & formulæ pro inveniendis valoribus quæsitis: bini valores m pertinent ad radium rubeum, & violaceum pro prima lente, bini m' pro secunda.

$m =$

$m = \begin{cases} 1{,}517 \\ 1{,}535 \end{cases}$	$a = 0{,}3206$ $b = -0{,}3206$	$c = 0{,}008$	$\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, vel $q = \frac{ma}{m-1}$ $p' = q - c$
$m' = \begin{cases} 1{,}589 \\ 1{,}619 \end{cases}$	$a' = -0{,}3201$ $b' = 1{,}533$	$c' = 0{,}004$	$\frac{1}{q'} = -\frac{m-1}{b} + \frac{m}{p'}$

En autem valores inventos calculo admodum expedito ope logarithmorum.

			Pro radio rub.	Pro violac.
Ex lente . . .	prima	$q =$	0,94072	0,92985
		$q' =$	0,30873	0,29832
	secunda . . .	$q =$	1,13582	1,14154
		$q' =$	0,98063	0,98059

85. Proderunt hi valores inventi pro transitu ad radios incidentes in marginem campi, ad quos applicari debet Trigonometria. Cum valores q obvenerint omnes positivi; satis patet, radium post egressum e quavis e quatuor superficiebus egredi cum convergentia, adeoque incidit convergens in quamvis e tribus postremis. Quare cum secunda superficies sit secunda primæ lentis, & convexa cum radio convergente; pertinet ad ipsam casus V, qui habetur num. 55 cum figura *6*. Cum tertia superficies sit prima lentis secundæ, & concava cum radio convergente; ad ipsam pertinet casus III, qui habetur num. 37 cum figura 4. Cum quarta superficies sit secunda ejusdem secundæ lentis, & concava cum radio itidem convergente; ad ipsam pertinet casus VII, qui habetur num. *66* cum figura 8. Ex iis, quæ proposita sunt pro singulis casibus enunciatis, erui debent valores pertinentes ad progressum calculi pro singulis superficiebus. Fructus calculi instituti habetur in tabula sequenti.

I. *Su-*

I. *Superficies prima lentis primæ convexa: radius parallelus.*
Probl. I : figura 1 : num. 25

Data pro radio	rubeo	violaceo
AC	0,3206	0,3206
EH	1:24	1:24
m	1,517	1,535
c	0,008	0,008
Quæsita	**Inventa**	**Inventa**
sin.ACE = EH : AC	7.28,05	7.28,05
sin.CEF = *sin*.ACE : *m*	4.54,88	4.51,42
AFE = ACE − CEF	2.33,17	2.36,63
CF = AC × *sin*.CEF : *sin*.AFE	0,616664	0,595981
AF = CF + AC	0,937264	0,916581

II. *Superficies secunda lentis primæ convexa: radius convergens.*
Probl. II : casus V : figura 6 : num. 35

Data pro radio	rubeo	violaceo
AC	0,3206	0,3206
AD = AF(1) − *c*	0,929264	0,908581
ADE = AFE(1)	2.33,17	2.36,63
m	1,517	1,535
Quæsita	**Inventa**	**Inventa**
CD = AC + AD	1,249864	1,229181
sin.CEB = CD × *sin*.ADE : AC	9.59,98	10. 3,40
ACE = CEB − ADE	7.26,81	7.26,77
sin.GEF = *m sin*.CEB	15.16,37	15.32,88
AFE = GEF − ACE	7.49,56	8. 6,11
CF = AC × *sin*.GEF : *sin*.AFE	0,620209	0,609762
AF = CF − AC	0,299609	0,289162

III.

III. *Superficies prima lentis secundæ concava: radius convergens.*
Probl. II : casus III : figura 4 : num. 37

Data pro radio	rubeo	violaceo
AC	0,3201	0,3201
AD = AF (2)	0,299609	0,289162
ADE = AFE (2)	7.49,56	8. 6,11
m	1,589	1,619
c'	0,004	0,004
Quæsita	Inventa	Inventa
CD = AC + AD	0,619709	0,609262
*sin.*CEB = CD × *sin.*ADE : AC	15.17,10	15.33,59
ACE = CEB − ADE	7.27,54	7.27,48
*sin.*GEF = *sin.*CEB : *m*	9.32,98	9.32,22
AFE = GEF − ACE	2. 5,44	2. 4,74
CF = AC × *sin.*GEF : *sin.*AFE . .	1,455718	1,461963
AF = CF − AC	1,135618	1,141863

IV. *Superficies secunda lentis secundæ concava: radius converg.*
Probl. II : casus VII : fig. 8 : num. 66

Data pro radio	rubeo	violaceo
AC	1,533	1,533
AD = AF (3) − *c*'	1,131618	1,137863
ADE = AFE (3)	2. 5,44	2. 4,74
m	1,589	1,619
Quæsita	Inventa	Inventa
CD = AC − AD	0,401382	0,395137
*sin.*CEB = CD × *sin.*ADE : AC	0.32,84	0.32,15
ACE = ADE − CEB	1.32,60	1.32,59
*sin.*GEF = *m sin.*CEB	0.52,18	0.52,05
AFE = ACE + CEF	2.24,78	2.24,64
CF = AC × *sin.*CEF : *sin.*AFE . .	0,552635	0,551752
AF = AC − CF	0,980365	0,981248

86. In hac tabula habentur pro singulis superficiebus prius valores dati, tum valores analytici inveniendorum, omissis iis, quæ pertinent ad ipsorum deductionem. Occurrunt ibi quatuor divisiones distinctæ numeris I, II, III, IV, quæ pertinent ad totidem superficies, quarum singulæ habent in fronte suos titulos, tum tres columnas: harum prima quævis habet valores analyticos, primum quidem datos, tum quæsitos, qui sunt quinque in divisione III, quatuor in reliquis. Inter data sequentium trium postremarum habetur valor rectæ AD, & anguli ADE assumendus ex AF, & AFE divisionis præcedentis, quod indicant numeri adjecti inclusi inter suas parentheses. In secunda columna habentur valores numerici pro primo radio rubeo, in tertia pro postremo violaceo. In secunda linea columnæ 2, & 3 divisionis II positum est 1 : 24 pro $\frac{1}{24}$, & eodem pacto in linea 2 quæsitorum primæ divisionis, 2, 4, 7 divisionis tertiæ, 2, 7 divisionis secundæ, & quartæ, quæ debent habere terminum formulæ fractionarium, denominator, facilioris impressionis gratia, positus est post numeratorem interpositis binis punctis. In omnibus columnis numerorum, ubi agitur de lineis, fractiones decimales separatæ sunt a valore integrorum per virgulam de more; ubi autem de angulis, habentur gradus ante punctum, tum minuta post ipsum, & partes minutorum centesimæ separatæ ab ipsis itidem per virgulam: libuit enim adhibere potius partes minutorum centesimas, quam secunda, quod reddit simpliciorem inventionem partium proportionalium, & accurationem potius majorem, quam minorem. Assumpsimus hìc notas decimalium sex; dum pro radio infinite proximo axi assumpsimus tantummodo 5: nam hìc plures termini adhibentur in calculo. Omittemus postremam, ubi agetur de valoribus finalibus, qui exhibent distantias a postrema superficie quæsitas.

87. Consideranti eam tabulam occurrit primo loco discrimen inter divisionem primam, & tres reliquas. Illa non habet nisi quinque lineas quæsitorum, dum hæ habent septem. Postremæ quatuor illius respondent postremis quatuor harum: parallelismus radii incidentis reduxit priores harum tres ad unicam exhibendo immediate angulum ACE. In hisce postremis quatuor lineis omnium

qua-

quatuor divisionum, ut & in prioribus tribus trium postremarum, non occurrit aliud discrimen, nisi multiplicatio per m in II, & IV, quæ pertinet ad egressum e vitro in aerem, succedens multiplicationi per fractionem $\frac{1}{m}$, quæ in I, & III pertinet ad ingressum ex aere in vitrum, & mutatio aliqua litterarum C, & B in litteras G, & D positas in iisdem lineis ad partes oppositas respectu puncti E, ac signi positivi in negativum, & vice versa. Si retinerentur eædem litteræ; succederet aliquando in figuris angulo acuto ejus supplementum obtusum, quod habet sinum eundem. Ubi adhibendus est sinus inveniendus ex angulo invento, nulla occurrit ambiguitas: ea habetur; ubi e sinu eruendus est angulus, qui respondet duplex eidem sinui, alter acutus, & alter obtusus. Hinc cum capienda est summa, vel differentia anguli cujuspiam inventi cum alio, hærendum esset in singulis casibus, & reflexio adhibenda ad applicandum singulis calculum, quod mentem distrahit, & erroribus calculi numerici occasionem præbet ob ipsam mentis distractionem. Hæc ambiguitas evitatur per illos casus applicatos singulos singulis figuris. Eo pacto semper adhibendus est angulus acutus respondens sinui in singulis operationibus.

88. Vidimus, quo pacto ex valoribus q inventis determinari possit, qui casus adhiberi debeat cum sua figura pro singulis superficiebus. Idem præstarent considerationes, quas proposuimus in evolvendis singulis casibus ad videndum, an punctum F debeat abire ultra superficiem, an citra: sed id facilius obtinetur per signa positiva, vel negativa valorum q erutorum e formulis, qui respondent singulis valoribus AF hìc inventis pro singulis superficiebus. Hìc radios sphæricitatum assumimus semper positivos in omnibus hisce calculis trigonometricis, ubi etiam cum soli obveniant sinus, nulla occurreret mutatio signorum, quæ habetur, ubi adhibentur cosinus, vel tangentes, in quibus transeundo ab angulo acuto ad obtusum, mutandum est signum. Et quidem non solum occurrunt soli sinus, sed habentur semper anguli acuti. Ubi autem occurrunt subtractiones, ita res sunt dispositæ, ut sem-

per minor quantitas subtrahatur a majori. Eo pacto res omnis reducitur ad simplicem mechanismum quendam, præcluso aditu distractionibus mentis, quæ orirentur ex necessitate reflexionum novarum.

89. In usu figuræ 8 pro postrema superficie concava determinandum est, utrum adhiberi debeat e punctis D, D'. Sed id facile determinatur ex valore *q* invento pro tertia superficie, vel valore rectæ AF, quæ ipsi respondet in figura 4. Cum enim is obvenerit minor radio sphæricitatis quarto AC = 1,533; satis patet adhibendum esse punctum D, non D'.

90. Patet itidem, totum discrimen valorum provenire a discrimine inter valores *m*, *m'*. Conferendo inter se valores *q*, vel AF, qui habentur pro radio rubeo, & violaceo in singulis superficiebus, satis perspicitur eorum discrimen, quod in tertia superficie abit ab 1,135618 ad 1,141863, sed demum fere penitus corrigitur in quarta.

91. Ex hac applicatione horum casuum ad singulas superficies objectivi compositi e binis lentibus satis patet progressus, qui haberi deberet, si accederent aliæ binæ superficies lentis tertiæ. Semper facile determinaretur, ad quem casum singulæ pertinerent, quæ essent data, quæ quæsita, & hæc quidem semper reducerentur ad similes septem pro singulis.

92. Singuli valores finales AF harum quatuor divisionum respondent, ut innui, singulis valoribus *q* tabulæ præcedentis. Discrimen inter valores respondentes radio rubeo, & violaceo tam in hac tabula, quam in illa præcedenti, oritur a diversa refrangibilitate, discrimen autem inter valores AF hujus, & *q* illius a figura sphærica. Ea discrimina sunt errores refrangibilitatis, & sphæricitatis. Sed errores qui hic considerantur, sunt tantummodo ii, qui pertinent ad postremos AF hujus tabulæ, & postremos *q'* illius. Ut ii unico intuitu videri, & comparari possint, apponemus ipsos redactos in tabulam ad calcem numeri 95.

93. Verum ut institui possit comparatio objectivi acromatici cum objectivo simplici ejusdem distantiæ focalis, & aperturæ, adjiciemus valores distantiæ, quam habet superficies hujus secunda, a con-

a concursu radii utriusque speciei tam infinite proximi axi, quam incidentis in marginem ipsius aperturæ, quos invenimus calculo instituto pro ejusmodi objectivo ex hoc eodem vitro communi eodem progressu, qui habetur hic in divisione I, & II, & qui adhibitus est pro prioribus binis valoribus q, & q' tabulæ superioris. Crassitudinem autem retinebimus eandem, quam hic adhibuimus pro prima lente. Verum pro ejusmodi objectivo oportet adhibere alios sphæricitatum radios multo longiores radiis ejusdem primæ lentis hujus objectivi acromatici, cujus secunda concava amandat in hoc vitrorum genere focum finalem ad distantiam plus etiam quam triplam, ut patet ex secundo valore $q' = 0,98063$ tabulæ numeri 84 pertinente ad egressum e secunda lente concava comparato cum primo $= 0,30873$ pertinente ad egressum e prima convexa.

94. Eos radios determinant formulæ Opusculi II. Habetur in iis pro lente unica excipiente radios parallelos $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, ubi $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ evadit $= \frac{2}{a}$ pro lente isoscelia, adeoque $\frac{1}{h} = \frac{2(m-1)}{a}$, & $\frac{a}{h} = 2(m-1)$, unde eruitur valor a redactus ad unitatem æqualem distantiæ focali h radiorum rubeorum, facto $a = 2(m-1) = 2 \times 0,517 = 1,034$. Assumpto hoc radio, & retentâ eâdem aperturâ $\frac{1}{24}$ ad habendam aperturam unius pollicis pro singulis pedibus, & eâdem crassitudine 0,008 relatâ ad unitatem distantiæ focalis objectivi simplicis æqualem distantiæ focali objectivi acromatici propositi, instituto calculo cum hoc novo radio sphæricitatis inventi sunt postremi valores q pro radio rubeo, & violaceo 0,99868, & 0,96505, ac postremi AF 0,995911, & 0,962147.

95. In tabula sequenti habebitur videndus unico aspectu ultimus totius hujusce perquisitionis fructus. Occurret divisio in binas partes: prima exhibebit valores pertinentes ad objectivum simplex ex eodem vitro communi, ex quo constat lens prima objectiva, secunda valores pertinentes ad hoc secundum, ut appareat

reat magnitudo errorum illius, & quantum ii ab hoc corrigantur. Prima columna continebit quatuor distantias focales inventas, quæ designabuntur numeris Romanis. Secunda columna habebit differentiam distantiæ primæ a secunda, & tertiæ a quarta, quæ differentia est error refrangibilitatis, & differentiam primæ a tertia, ac secundæ a quarta, quæ est error sphæricitatis, qui nimirum in prima parte tabulæ sunt errores objectivi simplicis, in secunda errores residui in objectivo acromatico proposito. Retinebimus autem in valoribus erutis per Trigonometriam notas decimalium tantummodo quinque juxta id, quod innuimus superius.

Pars I	*Pro objectivo simplici e vitro communi*			
Distantiæ focales		Errores		
I. Rubei infinite proximi axi . .	0,99868	I — II . .	0,03363	refrangibilitatis
II. Violacei infin. proximi axi . .	0,96505	III — IV . .	0,03376	
III. Rubei marginalis	0,99591	I — III . .	0,00277	sphæricitatis
IV. Violacei marginalis	0,96215	II — IV . .	0,00290	

Pars II	*Pro objectivo acromatico*			
I. Rubei infinite proximi axi . .	0,98063	I — II . .	0,00004	refrangibilitatis
II. Violacei infin. proximi axi . .	0,98059	III — IV —	0,00089	
III. Rubei marginalis	0,98036	I — III . .	0,00027	sphæricitatis
IV. Violacei marginalis	0,98125	II — IV —	0,00066	

96. Considerando hanc tabulam incurrit statim in oculos defectus omnium distantiarum, quæ habentur in prima columna partis utriusque ab illa unitate, quæ debuisset obvenire; cum omnes valores radiorum sphæricitatis eruti sint e formulis supponentibus distantiam focalem = 1. Is quidem est exiguus, sed non prorsus insensibilis. Debet autem provenire a neglectu quantitatum ordinis inferioris facto ad eruendas formulas ipsas, quæ sine eo neglectu evasissent intractabiles: nam in calculis numericis institutis & in Opusculo, & hic, ac repetitis, tantus communis error obvenire non potuit. Si quid fortasse adhuc in iis super-

supersit; id non habebitur, nisi in postremis decimalium notis, quod subrepserit in accipiendis partibus proportionalibus logarithmorum, & numerorum; quanquam in eo itidem summa diligentia est adhibita, & repetiti calculi ipsi cum amico seorsum subducente singulos simul, & conferente ea, quæ post operationes singulas nobis proveniebant, ut ubi ob mentis evagationem in adeo materiali labore fere inevitabilem non bene congruerent, revocarentur ad trutinam, & corrigerentur. Verum si quidquam adhuc supersit, id quidem, ut alibi etiam monuimus, nequaquam nocebit, in exemplo nimirum, in quo methodus est omnino accurata, & errorum expers: poterit, qui forte velit hosce ipsos calculos numericos repetere per se ipse, & videre, an quæ occurrunt discrimina, reipsa tribuenda sint quantitatibus neglectis in eruendis formulis, an arithmeticorum numerorum errorculis. Aliunde, ut itidem ibidem monuimus, hæc omnis numerorum applicatio adhibenda est pro singulis novis vitrorum generibus. Hic in iis considerationibus, quas subjiciemus, supponemus calculos ipsos numericos accuratos. Corriget considerationes ipsas, qui forte eosdem repetens deprehenderit adhuc in ipsis errorculos.

97. Hic defectus ab unitate in quatuor numeris primæ columnæ utriusque partis nihil noceret perfectioni telescopii, si esset æqualis in omnibus. Omnes radii digressi ab unico puncto objecti colligerentur in unico puncto imaginis. Earum differentiæ sunt errores illi refrangibilitatis, & sphæricitatis, quorum priores inducunt ex parte iridem illam, sive colores, qui in communibus telescopiis dioptricis apparent, quanquam ii etiam oriuntur multo magis a vitio systematis ocularium, ut supra etiam monuimus in hoc ipso volumine, & patebit admodum evidenter in primo sequentis voluminis Opusculo. Utrumque autem horum errorum genus obest distinctioni. Ii quidem sunt errores longitudinales, cum sint differentiæ distantiarum focalium pertinentium ad eos quatuor radios rubeum, & violaceum incidentes prope centrum aperturæ, & in ejus marginem. Sed cum ibidem ii radii secent axem, & se decussent; inde fit, ut in quovis plano perpendicu-

lari

lari ad axem dispergantur ipsi per circellum, ut jam itidem monuimus, & eorum circellorum superpositio pariat confusionem, quæ correctis erroribus longitudinalibus, vel imminutis, corrigitur & ipsa, vel imminuitur.

§. V.

Comparatio errorum cum distantia focali, & apertura, ac ipsorum mutua.

98. INGENS habetur discrimen inter nexum erroris longitudinalis cum distantia focali, apertura, & diametro erroris circularis, pro refrangilitate, & sphæricitate. Pro errore longitudinali refrangibilitatis lentis isosceliæ habetur formula admodum simplex. Habuimus (num. 94) $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, adeoque est $h(m-1) = f$. Cum igitur pro data lente quacumque maneat valor f ob radios a, & b constantes, erit $dh(m-1) + hdm = 0$ per regulas differentiationis, quarum hæc, quæ hîc occurrit adhibenda, expresse demonstrata est calculo finito in hisce ipsis Opusculis, ubi omnia reduximus fere semper ad methodos, quantum fieri potuit simplicissimas, & maxime elementares. Hinc erit $dh = -\frac{hdm}{m-1}$; unde profluit hujusmodi theorema. Est $m-1$ ad dm, ut distantia focalis h ad errorem longitudinalem, qui error idcirco, dato valore m, nimirum in eodem vitri genere, erit, ut distantia focalis h. Facto $h = 1$, & assumpto pro m valore medio inter binos adhibitos pro objectivo simplici 1,517, & 1,535, nimirum 1,526, & pro dm ipsorum differentiâ 0,018, erit error longitudinalis pro refrangibilitate $= \frac{18}{526} = 0{,}0342$; dum medius inter binos inventos in prima, & secunda linea secundæ columnæ partis II hujus tabulæ est 0,0337, adeoque hîc etiam formula exhibet valorem aliquanto majorem, quam calculus accuratus.

99. Pro errore sphæricitatis formula est aliquanto minus simplex;

plex; ea tamen facile deducitur e formulis, quæ habentur in eodem capite I Opusculi II num. 41. Ibi error refrangibilitatis pro lente unica est $r^2\rho$: valor r in casu radiorum, qui adveniunt paralleli, est ipsa distantia focalis h, & evanescentibus postremis tribus terminis inclusis parenthesi valoris ρ, is valor evadit $\frac{m-1}{m} \times (\frac{m^3}{f^3} - \frac{2m^2+m}{af^2} + \frac{m+2}{a^2f})\frac{1}{2}e^2$, ubi e est dimidia apertura. Porro pro lente isoscelia nostri objectivi simplicis invenimus hic numero superiore $f = h(m-1)$, & (num. 94) $\frac{a}{h} = 2(m-1)$; unde fit $a = 2h(m-1)$. Substitutis pro r, a, f hisce valoribus, error $r^2\rho$ evadet $= (\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{4}(2m+1) + \frac{m+2}{8m}) \times \frac{e^2}{(m-1)^2h}$, adeoque dato valore m, nimirum itidem in eodem genere vitri, is erit in ratione composita ex duplicata directa aperturæ, quæ est dupla valoris e, & reciproca simplici distantiæ focalis h. Facto itidem $h = 1$, & $m = 1,526$, & posito $\frac{1}{24}$ pro e, ut ipsum assumpsimus, obtinetur 0,00276, dum medius inter duos inventos in tertia, & quarta linea ejusdem secundæ columnæ partis primæ ejus tabulæ est 0,00283: adeoque hic e contrario formula exhibet valorem tantillo minorem vero. Is dissensus licet multo minor non videtur tribuendus fractionibus minoribus neglectis in calculo trigonometrico, cum pro ipso assumptæ fuerint notæ decimalium sex; sed quantitatibus ordinum inferiorum neglectis pro deductione formularum.

100. Verum e formulis propositis, quæ exhibent valores parum admodum abludentes a veris inventis methodo accurata, jam patet ingens discrimen in nexu errorum longitudinalium refrangibilitatis, & sphæricitatis cum distantia focali, & apertura. Primus non pendet ab apertura ipsa, sed est idem pro eadem distantia focali tam pro majoribus, quam pro minoribus aperturis: ita autem pendet ab ipsa distantia focali, ut sit ipsi directe proportionalis. Secundus pari distantiâ focali est directe proportionalis quadrato aperturæ, & pari aperturâ proportionalis recipro-

ce quadrato ejusdem distantiæ focalis. Id discrimen est apprime notandum, futurum nimirum magno usui in comparatione eorundem errorum mutua ad se invicem.

101. Pro nexu inter errorem longitudinalem, & circularem habetur aliud discrimen, cujus deductio, & demonstratio pendet ab aliis principiis, quæ ego evolvi in prima e veteribus meis illis dissertationibus, quas jam toties nominavi, & habetur etiam in Monumentis Academiæ Bononiensis §. 3, ubi egi de horum errorum comparatione. Patebunt eadem ex iis, quæ continentur in tertia e quinque impressis Viennæ in Austria, ubi binis Bononiensibus adjectæ sunt aliæ tres; eam enim exhibebo in volumine sequenti, cum in ea demonstretur discrimen aliud inter errores ipsos circulares, quod est maximi momenti, quod etiam in superioribus jam indicavi, sint autem admodum rara ejus editionis exemplaria extra Germaniam. Discrimen in nexu inter errorem longitudinalem, & diametrum erroris circularis habetur in sequenti theoremate. Error longitudinalis ad diametrum erroris circularis est pro refrangibilitate, ut dupla distantia focalis ad aperturam, & pro refrangibilitate, ut quadrupla eadem distantia ad eandem aperturam.

102. Ex hoc duplici discrimine nexus erroris longitudinalis cum distantia focali, & cum apertura illud consequitur, ut ubi instituitur comparatio inter errores refrangibilitatis, & sphæricitatis, pari etiam distantiâ focali, ratio prioris ad posteriorem computata a circellorum diametris est duplo major, quam ratio erroris longitudinalis illius ad longitudinalem hujus. Pari autem aperturâ hæc secunda ratio, auctâ distantiâ focali, augetur in ratione duplicata distantiæ ejusdem: nam e theoremate deducto numero 98, auctâ distantiâ, error longitudinalis augetur in ratione directa distantiæ ipsius, & e deducto numero 99 minuitur in ratione ipsius reciproca.

103. Newtonus in Optica lib. I, part. I, experim. 8, determinatâ diametro erroris circularis pertinentis ad diversam refrangibilitatem pro objectivo plano-convexo, cujus diameter curvaturæ pedum 100, diameter aperturæ unciarum 4, ratio sinuum (quæ

apud

apud nos est m) 1,55, superficies autem plana obvertitur objecto, determinat rationem, quam habet diameter erroris circularis orti a refrangibilitate ad errorem ortum a figura sphærica, quam invenit 5449 ad 1. Eandem autem ibidem deduxi ego ex hisce ipsis meis formulis applicatis ad eum casum, & ex natura causticæ, quam radii refracti contingunt, quæ quidem evoluta methodo adhuc simpliciore habetur itidem in illa tertia dissertatione. Illud usque adeo ingens discrimen inter eos errores effecit, ut error figuræ sphæricæ videretur penitus contemnendus respectu erroris diversæ refrangibilitatis usque adeo majoris. Hinc primo aspectu videri possunt erronei calculi, per quos determinati sunt errores propositi in hac secunda columna primæ partis hujus tabulæ: nam in ipsa error medius inter duos refrangibilitatis invenitur 0,03369, & error medius inter duos sphæricitatis 0,00283, ad quem ille habet rationem minorem, quam 12 ad 1. Sed si consideretur sola ratio duplicata distantiarum focalium, & discrimen erutum numero 102 e binis præcedentibus, statim patebit, quo pacto usque adeo diminuta sit in casu nostro ea ratio. Distantia focalis in illa lente plano-convexa est paullo minor dimidiâ diametro convexitatis ipsius, nimirum paullo minor pedibus 50. Si haberetur cum nostro valore m, & nostrâ aperturâ trium pollicum lens isoscelia habens distantiam focalem pedum 50; ratio hic inventa, quæ est major, quam 11 ad 1, deberet multiplicari per $\frac{2 \times 50 \times 50}{3 \times 3} = \frac{5000}{9}$, & evaderet major, quam $\frac{5000 \times 11}{9} = \frac{55000}{9} = 6111$ ad 1, quæ nimirum esset adhuc major, quam illa inventa a Newtono. Discrimen oritur ex eo, quod ipse assumpsit rationem sinuum 1,55, nos 1,527, ille diametrum aperturæ unciarum quatuor, nos pollicum trium, quod quidem rationem ipsius deberet augere: sed ille adhibuit lentem plano-convexam superficie planâ obversâ objecto, nos lentem isosceliam, quod e contrario minuit rationem ab eo inventam: nam in Opusculo I voluminis sequentis inveniemus ingens discrimen inter errores sphæricitatis lentium habentium eandem distan-

tiam focalem, sed diversas formas, inter quas error sphæricitatis est multo major in lente plano-convexa obvertente planum objecto, quam in isoscelia; ut etiam in hac multo major, quam in plano-convexa obvertente planum oculo. Cæterum applicatis Newtoni elementis ad hasce nostras formulas, & ad hæc theoremata, invenitur illa ipsa ratio ab eo proposita, uti superius affirmavimus, & ostensum est in illa veteri dissertatione prima.

104. Verum quæ hìc proposuimus, satis tuentur numeros hìc inventos a suspicione erroris: inde autem patet & illud, in aperturis majoribus ita excrescere errorem sphæricitatis, ut omnino contemni non possit: & vero idcirco si apertura trium pollicum tribuatur objectivo simplici constanti lente unica; imago evadit maxime confusa, quæ apertura idcirco tribuitur objectivis acromaticis elaboratis e vitris idoneis, quia præter errorem refrangibilitatis corrigitur in ipsis etiam error sphæricitatis, ut jam videbimus in consideranda parte II hujus ipsius tabulæ. Accedit illud aliud discrimen, quod innuimus etiam hìc superius num. 101, & patebit in illa dissertatione tertia, quam proponemus in sequenti volumine, quod nimirum dum in errore circulari refrangibilitatis densitas luminis in accessu ad centrum augetur in infinitum, sed in recessu ita minuitur, ut in margine penitus evanescat; densitas ipsa in errore sphæricitatis augetur non solum in accessu ad centrum, sed posteaquam in recessu decrevit usque ad duos trientes ejus, quæ haberetur, si totum lumen distribueretur æqualiter per totam ejusdem circelli aream, augetur iterum ita, ut in accessu ad peripheriam excrescat iterum in infinitum: inde autem fit, ut error refrangibilitatis non satis percellat oculi fibras, nisi parte sui proxima centro, error autem sphæricitatis vim ingentem extendat per totam amplitudinem. Idcirco mihi persuasum est, ingentem effectum telescopiorum acromaticorum tribuendum esse non solum ex aliqua parte, sed ex parte multo maxima correctioni erroris sphæricitatis, qua de re agemus pluribus in eodem primo Opusculo voluminis sequentis.

105. Conferendo jam inter se priores duos errores refrangibilitatis, qui habentur in eadem secunda columna primæ partis hujus

tabu-

tabulæ, quorum prior pertinet ad radios infinite proximos axi, posterior ad marginales, & inter se posteriores duos sphæricitatis, quorum prior pertinet ad radios rubeos, posterior ad violaceos, incurrit in oculos discrimen, quod habetur inter eos utriusque binarii, qui sunt ejusdem generis, exiguum quidem, sed tamen aliquod. Error uterque, qui est posterior in utroque binario, est tantillo major, quam prior. Illud discrimen non pertinet, nisi ad quartam decimalium notam, cum utrobique sit particularum tantummodo 0,00013; sed ad eam non possunt ascendisse errores orti ex neglectu fractionum minorum in calculis arithmeticis, quorum ii, qui plures operationes exigunt, & pertinent ad radios marginales, producti sunt usque ad notas decimalium sex; ii autem, qui pertinent ad centrales, & exigunt pauciores, usque ad quinque. Videtur tamen casui fortuito adscribendum, quod in utroque binario eadem prorsus differentia obvenerit earum particularum 13 sine ullo discrimine, ne unius quidem particulæ, ubi illud accidit, quod accidere solet in tabulis sinuum, & in astronomicis plerumque, ut etiam ubi differentiæ primæ terminorum proximorum non sunt æquales inter se, sint æquales secundæ, quæ est proprietas parabolæ, in qua sola differentiæ ordinatarum secundæ respondentes differentiis abscissarum æqualibus sunt accurate æquales inter se: nam hæ etiam differentiæ horum errorum sunt quædam differentiæ secundæ; cum errores ipsi sint differentiæ primæ valorum expressorum in prima columna. Verum hic etiam tantus consensus, licet fortuitus, illud efficit, ut in calculis arithmeticis, quos hic tantâ curâ, sed labore incredibili ob meas mentis evagationes continuas, frustra prius per me solum, vel per amicum seorsum subducentem repetitos pluribus vicibus, tandem simul subduximus corrigendo discrimina, errorem residuum timere non possim.

106. Transeundo jam ad errores objectivi acromatici propositi, qui habentur in secunda columna partis secundæ hujus tabulæ, statim incurrit in oculos, quam exigui sint, cum ultra quartam decimalium notam non ascendant, dum error sphæricitatis secundæ columnæ partis primæ ascendit usque ad tertiam, & error

ror refrangibilitatis etiam usque ad secundam ; unde patet, quantum conferat ad corrigendos saltem maxima ex parte errores utriusque generis Dollondianum inventum, & quo progrediatur vis formularum, ac methodorum, quas in hoc secundo Opusculo proposuimus pro determinatione radiorum sphæricitatis, quæ correctionem quæsitam præstent.

107. Porro ibi in utroque binario error primus est positivus, secundus negativus, adeoque ille non est satis correctus., hic est plusquam correctus. Eorum differentia, quæ est summa numerorum eorundem acceptorum independenter a signis, invenitur hìc etiam prorsus eadem, nimirum 0,00093 casu itidem fortuito sane, sed felici, differentiis secundis hìc etiam æqualibus, ut in parabola.

108. Hoc residuum ita est exiguum, ut multo majóres debeant oriri errores ob incerta intra limites adhuc etiam arctiores elementa adhibenda pro hisce calculorum generibus. Valores m, & m' non possunt haberi prorsus accurati, nec sphæricitates ab artifice induci prorsus accurate respondentes radiis ipsarum erutis ex ipsis calculis, aut prorsus accurate determinari radii earum, quæ re ipsa inductæ sunt. Errores inde profluent multo majores illis, qui hìc inventi sunt residui, qui pertinent ad radios luminis extremos incidentes prope centrum, & marginem, qui quidem sensum omnem deberent effugere. Quamobrem si ageretur de his tantummodo pertinentibus ad hoc individuum objectivum acromaticum ; supervacaneus esset omnis labor necessarius ad eos corrigendos per methodum, quam initio adumbravimus, & sequenti paragrapho adhuc magis evolvemus.

109. Verum in primis fieri potest, ut hi errores residui in aliis combinationibus, & alio vitrorum genere inveniantur majores, quam hìc inventi : deinde videndum, quid supersit erroris in radio altero ex iis extremis, quorum jam innotescunt valores m, & m', incidente in punctum aperturæ intermedium inter centrum, & marginem, ut appareat, an ipsius error sit ita major his inventis, ut videatur exigere correctionem. Pro ipso methodus calculi est prorsus eadem : substituendum est tantummodo loco va-
loris

loris 1:24 adhibiti pro distantia EH figuræ 1 initio tabulæ numeri 85 ejus dimidium 1:48. Loco alterius e binis radiis rubeo, & violaceo pro hac quinta distantia focali, adhiberi potest radius, cujus valores m, & m' concipiantur æquales valoribus arithmetice mediis inter eos, qui inventi sunt pro illis; nam & is conjungi poterit cum reliquis. Is non erit ullus ex radiis intermediis inter illos duos, cum ex inversione spectri successiva inventum sit, differentias dm, dm' pro diversis radiorum binariis non habere ad se invicem rationem eandem; quam ob causam, ut superius demonstravimus, ad eum conjungendum requiritur necessario tertia substantia ad id idonea. Adhuc tamen conjunctio illius intermedii fictitii proderit ad corrigendum melius errorem figuræ sphæricæ; quæ conjunctio si succedat hac methodo; objectivum compositum e binis lentibus præstabit composito e ternis, quarum extremæ sint ex eadem substantia: additio enim ipsius tertiæ nihil confert ad majorem unionem colorum, sed tantummodo ad majorem correctionem erroris figuræ sphæricæ: aliunde vero tertia lens, ut jam diximus, plures radios disperdit ob duplicem reflexionem adjectam.

110. Ejusmodi etiam calculum, superioribus omnibus jam conscriptis, demum censuimus addendum pro eo radio fictitio. Obvenit distantia focalis 0,98058, quæ addi potest illis quatuor primæ columnæ partis secundæ tabulæ numeri 95. Hæc a secunda ibi posita non differt, nisi per unicam unitatem postremæ classis decimalium, a prima per 4. Cum iis convenit multo magis, quam radii incidentes in marginem aperturæ, adeoque in hoc sphæricitatum systemate pro hoc vitrorum genere hic etiam error ita correctus est, ut nihil ulterius desiderari posse videatur. Si id accidat in omnibus combinationibus binarum lentium pro vitris omnibus; præferenda erit semper combinatio lentium duarum combinationi trium, ubi non adhibeantur nisi binæ substantiæ, cum quibus non potest quæri unio colorum plurium quam duorum, sed præter unionem horum quærenda est satis magna correctio errorum sphæricitatis. Si in aliis combinationibus inveniantur errores majores; quærenda erit eorum correctio methodo, quam propone-

nemus in paragrapho sequenti ; quæ si succedat ; adhuc compositio e binis lentibus præferenda erit compositioni e tribus.

111. Pro tertio colore intermedio requireretur, ut toties diximus, lens tertia ex alia substantia idonea. Tum quatuor distantiis focalibus radiorum extremorum incidentium prope centrum, & in marginem aperturæ addendæ essent aliæ tres hujusce tertii incidentis prope centrum, in margine, & in medio : calculus esset idem positis tantummodo ipsius valoribus m, m' pro iis, qui adhibiti jam sunt : per eas septem distantias invenirentur errores sex destruendi per mutationes successivas factas in sex radiis sphæricitatum, ut itidem jam diximus initio hujus supplementi : methodus est eadem, ac ea, pro cujus applicatione ad quinque distantias, & errores quatuor corrigendos per mutationes quatuor radiorum sphæricitatis objectivi, de quo agimus, proponemus hìc valores inveniendos, & æquationes finales. Exemplum numericum non addemus, ne pro eruenda quidem magnitudine ejus erroris : piget enim pro solo exemplo repetere tot numericos calculos mihi in primis molestissimos, quanquam pro eo solo sint minus operosi : nam pro correctione ita sunt prolixi, ut omnino industrium etiam numericum calculatorem absterreant, quemadmodum apparebit in ipsis formulis, quas pro sola methodo uberius exponenda proponemus in sequenti paragrapho. Supponemus autem ibi cognitam & illam quintam distantiam, quam non invenimus.

§. VI.

Methodus corrigendi errores inventos.

112. EA methodus est proposita, & magna ex parte exposita in paragrapho I a numero 11. Inventæ sunt in columna prima partis II tabulæ numeri 95 quatuor distantiæ focales inæquales. Subtrahendo tres postremas a prima habebuntur tres errores e, e', e'', qui hìc essent, factâ ejusmodi subtractione, $e = 0{,}00004$, $e' = 0{,}00027$, $e'' = -0{,}00062$: postremus evadit hìc negativus, cum quarta distantia obvenerit major, quam prima. Cum habeatur

tur num. 10 distantia 0,98058 computata pro illo alio radio incidente in puncta media inter centrum, & marginem; subtrahendo ipsam a prima habebitur quartus error $e''' = 0,00005$. Appellamus errores hasce differentias primæ distantiæ a reliquis, non differentias omnium ab unitate, cui deberent æquari omnes; quia correctis illis jam habetur conjunctio omnium eorum radiorum in unico puncto axis, quod unum requiritur, ad habendam distantiam focalem communem. Inventis radiis sphæricitatum, qui præstent eam unionem per correctiones ipsis adhibendas, & inveniendas hac methodo, una cum distantia ipsa communi simul inventa per correctionem, quam methodus hæc ipsa exhibebit, reducentur radii omnes correcti ad unitatem æqualem huic novæ distantiæ correctæ dividendo singulorum valores ita correctos per valorem pariter correctum distantiæ focalis; nam ii valores & ipsorum, & hujus referuntur ad eandem unitatem præcedentem, cui debebant evadere æquales eæ omnes quinque distantiæ inventæ.

113. Augeatur jam primus radius sphæricitatis a per exiguam quantitatem, quæ dicatur n, & retentis reliquis valoribus radiorum b, a', b' inveniantur novæ totidem distantiæ, quarum postremæ subtractæ a prima exhibebunt novos valores errorum: dicantur hi $e1$, $e'1$, $e''1$, $e'''1$, ac fiant $e - e1 = r1$, $e' - e'1 = r'1$, $e'' - e''1 = r''1$, $e''' - e'''1 = r'''1$. Assumpto iterum priore valore a, retentis a', & b', augeatur secundus radius b per quantitatem exiguam n', & inveniantur novæ quinque distantiæ focales cum quatuor excessibus primæ supra reliquas, qui dicantur $e2$, $e'2$, $e''2$, $e'''2$, ac novis $r2 = e - e2$, $r'2 = e - e'2$, $r''2 = e - e''2$, $r'''2 = e - e'''2$. Assumptis prioribus valoribus a, b cum valore b', & aucto valore a' per exiguum incrementum n'', rursum inveniantur novæ distantiæ $e3$, $e'3$, $e''3$, $e'''3$, cum novis valoribus $r3 = e - e3$, $r'3 = e - e'3$, $r''3 = e - e''3$, $r'''3 = e - e'''3$. Demum assumptis itidem valoribus primitivis a, b, a', augeatur radius b' augmento exiguo n''', & inveniantur eodem modo novæ quinque distantiæ, cum novis quatuor excessibus primæ supra reliquas $e4$, $e'4$, $e''4$, $e'''4$, ac $r4 = e - e4$, $r'4 = e - e'4$, $r''4 = e - e''4$, $r'''4 = e - e'''4$.

114. Iis inventis, & factis x, x', x'', x''' quatuor mutationibus valorum a, b, a', b', qui debeant simul destruere omnes illos quatuor errores e, e', e'', e''', supponendo differentias exiguas proportionales, habebuntur sequentes proportiones pro imminutione valorum e, sive pro valoribus r, qui ei mutationi respondebunt $n:x :: r1 : \frac{r1x}{n} :: r'1 : \frac{r'1x}{n} :: r''1 : \frac{r''1x}{n} :: r'''1 : \frac{r'''1x}{n}$. Per has, & similes proportionales habebuntur sequentes effectus

incrementi n radii a erunt . . . $\frac{r1x}{n}$, $\frac{r'1x}{n}$, $\frac{r''1x}{n}$, $\frac{r'''1x}{n}$

incrementi n' radii b erunt . . . $\frac{r2x'}{n'}$, $\frac{r'2x'}{n'}$, $\frac{r''2x'}{n'}$, $\frac{r'''2x'}{n'}$

incrementi n'' radii a' erunt . . . $\frac{r3x''}{n''}$, $\frac{r'3x''}{n''}$, $\frac{r''3x''}{n''}$, $\frac{r'''3x''}{n''}$

incrementi n''' radii b' erunt . . . $\frac{r4x'''}{n'''}$, $\frac{r'4x'''}{n'''}$, $\frac{r''4x'''}{n'''}$, $\frac{r'''4x'''}{n'''}$.

115. Summa omnium quatuor effectuum respondentium incrementis x, x', x'', x''' quatuor radiorum sphæricitatis, qui habentur in prima columna valorum inventorum, facta æqualis primo errori e ipsum destruet: summæ omnium, qui habentur in singulis reliquis columnis destruent errores e', e'', e'''. Habebuntur quatuor æquationes, quæ determinabunt quatuor valores quæsitos x, x', x'', x'''.

116. Ut habeantur unico aspectu valores, qui eruendi sunt e primò datis, ponemus eos eodem ordine, quo inveniendi sunt post denominationes datorum, & quæsitorum.

VALORES VETERES

117. *Distantiæ focales inventæ pro radio*

Rubeo infinite proximo axi . . . . d
Violaceo infinite proximo axi . . . . $d1$
Rubeo incidente in marginem aperturæ . . . . $d2$
Violaceo incidente in marginem aperturæ . . . . $d3$
Aliquo incidente inter centrum, & marginem . . . . $d4$
Errores . . $e = d - d1$, $e' = d - d2$, $e'' = d - d3$, $e''' = d - d4$

VA-

VALORES NOVI

118. *Incrementa successiva*

Radiorum a, b, a', b' . . . . n, n', n'', n'''

ERRORES POST MUTATIONEM

I . . . . $e1$, $e'1$, $e''1$, $e'''1$
II . . . . $e2$, $e'2$, $e''2$, $e'''2$
III . . . . $e3$, $e'3$, $e''3$, $e'''3$
IV . . . . $e4$, $e'4$, $e''4$, $e'''4$

119. CORRECTIONES POST MUTATIONEM

I. $r1=e-e1$, $r'1=e'-e'1$, $r''1=e''-e''1$, $r'''1=e'''-e'''1$
II. $r2=e-e2$, $r'2=e'-e'2$, $r''2=e''-e''2$, $r'''2=e'''-e'''2$
III. $r3=e-e3$, $r'3=e'-e'3$, $r''3=e''-e''3$, $r'''3=e'''-e'''3$
IV. $r4=e-e4$, $r'4=e'-e'4$, $r''4=e''-e''4$, $r'''4=e'''-e'''4$

120. ADDITIONES QUÆSITÆ PRO

Radiis a, b, a', b' . . . . x, x', x'', x'''

ÆQUATIONES PRO IPSIS

$$\frac{r1x}{n} + \frac{r2x'}{n'} + \frac{r3x''}{n''} + \frac{r4x'''}{n'''} = e$$

$$\frac{r'1x}{n} + \frac{r'2x'}{n'} + \frac{r'3x''}{n''} + \frac{r'4x'''}{n'''} = e'$$

$$\frac{r''1x}{n} + \frac{r''2x'}{n'} + \frac{r''3x''}{n''} + \frac{r''4x'''}{n'''} = e''$$

$$\frac{r'''1x}{n} + \frac{r'''2x'}{n'} + \frac{r'''3x''}{n''} + \frac{r'''4x'''}{n'''} = e'''.$$

121. Calculus debet incipere post singulas mutationes singulorum radiorum sphæricitatis ab inventione novarum distantiarum d, $d1$, $d2$, $d3$, $d4$, quæ adhibendæ sunt ad eruendos novos errores e, qui hic notantur cum numeris adjectis pro distinguendo eorum ordine : eorum inventio fiet eodem modo, quo inventi sunt præcedentes e, e', e'', e''' per subtractionem distantiarum se-

quentium a prima, quarum si quæpiam occurrat major ipsâ primâ, ejus valor e erit negativus, adeoque numero, qui ipsum exprimet, præmittendum erit signum negativum. Cavendum, ut dum mutantur singuli e sequentibus radiis sphæricitatis, resumantur valores præcedentium ii, qui habebuntur ante ipsorum mutationem, quemadmodum superius præcepimus, ut nimirum obtineatur effectus, quem parit illa sola manentibus cæteris. Signis ita semel ordinatis pro valoribus e, & valoribus n habitis pro positivis., valores r acquirent sponte sua signum sibi conveniens. Æquationes determinabunt signa valorum x, qui exhibebunt valores addendos, vel auferendos a radiis præcedentibus ad obtinendos novos.

122. Adhibitis hisce correctionibus habebuntur novi valores pro ipsis radiis. Per eos renovandus est omnis calculus ad videndum, utrum distantiæ omnes obvenerint æquales. Si adhuc inveniantur errores sensibiles; adhibendæ erunt novæ mutationes ipsorum radiorum, ubi ex successu prioris calculi patebit etiam, an præstet adhibere novos valores n positivos, an quempiam ex ipsis negativum. Repetito omni calculo eâdem methodo apparebit, quid sperari possit pro correctione integra. Ex immensitate hujus calculi numerici patet utique id, quod jam monuimus, non esse operæ pretium tam immanem laborem suscipere; nisi ubi ars Chymica constantes exhibuerit idoneorum vitrorum qualitates.

123. Methodus huic similis adhiberi potest pro cognoscendis erroribus residuis in dato systemate ocularium, licet ibi lentes a se invicem distent, & vero etiam adhiberi potest pro iis corrigendis in quibusdam combinationibus, quas proponemus in Opusculo I tomi sequentis. Aderunt ibi potissimum duæ combinationes, altera binarum lentium pro telescopiis dioptricis astronomicis, altera lentium quatuor pro terrestribus, quæ licet ex eodem vitro communi destruunt vi formularum colores, qui ab ocularibus potissimum induci solent, & minuunt plurimum errores sphæricitatis. Cum obtineatur multo facilius ingens copia vitri communis homogenei, multo utilius poterit subiri pro ipsis labor immanis hujusce generis calculorum.

EX-

EXTRAIT

DE CE PREMIER VOLUME.

§. I.

Notices préliminaires.

1. TOUT ce qu'il y a dans ce volume appartient à l'Optique, & regarde principalement cette espèce de lunettes qu'on appelle acromatiques. Ceux qui traitent ce sujet ordinairement ne parlent que de l'objectif formé de deux ou trois lentilles, dont l'une d'un verre qui en parité de réfraction fait une dispersion des rayons des différentes espèces plus grande que le verre commun : on forme de celui-ci l'autre lentille ou les deux autres. Le verre, qui fait cette dispersion plus grande est celui qui est plus chargé de plomb vitrifié. Celui qui est connu sous le nom de *flint-glass*, & un autre qu'on appelle *strass*, sont de cette espèce qui fait encore plus d'effet étant même plus chargé de plomb.

2. On savoit déjà que quand un rayon de lumière passe obliquement d'un milieu à un autre, comme de l'air au verre ou à l'eau, il change de direction, ce qu'on appelle réfraction : si l'on nomme angle d'incidence celui que fait le rayon en arrivant à la surface qui sépare ces milieux avec la ligne perpendiculaire à la même surface, & angle de réfraction celui qui est contenu par sa nouvelle direction avec la même perpendiculaire prolongée : on savoit aussi qu'en changeant l'inclinaison d'une manière quelconque, mais retenant les mêmes milieux, le sinus du premier a une raison constante au sinus du second. C'est la regle fondamentale de la Dioptrique que Descartes avoit tirée de la raison constante des co-sécantes trouvée par Snellius. Mais j'appelle en latin *angulum refractum* celui qu'on appelle communement

nement *angulum refractionis*, & en françois on l'appelle aussi communement *angle de réfraction*, quoiqu'il y a des auteurs qui l'appellent *angle rompu*. Moi comme étranger ayant trouvé l'expression de *rayon réfracté*, je crois de pouvoir l'appeller *angle réfracté* : la quantité de réfraction est plus proprement le changement de direction, c'est-à-dire, l'angle que la nouvelle route contient avec la continuation de la précédente. Quand le rayon revient du second milieu au premier, la raison des sinus est la même, que l'inverse de la précédente.

3. On croyoit avant Newton que tous les rayons en passant par la même surface avec la même inclinaison avoient la même quantité de réfraction : nous devons à ce grand homme la découverte essentielle de la différente réfrangibilité des rayons de différente espèce. Il a trouvé & démontré par une quantité prodigieuse d'expériences décisives, que le rayon blanc est composé d'une quantité innombrable de rayons particuliers de nature différente, dont chacun a son degré de réfrangibilité particulier de manière qu'en arrivant tous ensemble avec la même inclinaison à une même surface réfringente, les uns sont détournés plus, les autres moins de leur direction précédente. Quand ils arrivent tous réunis à l'œil, ils y excitent l'idée de la couleur blanche ; mais en y arrivant chacun séparément il excite celle d'une couleur particulière, sans que jamais cette couleur soit changée par aucun nombre d'autres réfractions ou réflexions. On a réduit toutes ces couleurs à sept en mettant dans une même classe toutes celles, dont les nuances ne sont pas trop différentes entre elles. Ces couleurs sont le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indago, le violet, qui dans cet ordre même sont plus réfrangibles les suivants que les précédents, le rouge se détournant le moins, & le violet le plus. C'est la théorie si célèbre de Newton qui a trouvé & trouve encore aujourd'hui des oppositeurs seulement parmi ceux qui ou n'ont pas lu ou n'ont pas compris ou assez examiné & comparé ensemble tout ce qu'on trouve dans l'ouvrage immortel de son Optique.

4. Cet-

4. Cette différente réfrangibilité a été long temps le principal obstacle à la perfection des lunettes. La lunette a un objectif qui forme l'image de l'objet dans son foyer, & un oculaire ou plusieurs. Leurs surfaces sont sphériques : la courbure de cette figure en détournant les rayons qui partis de chaque point de l'objet passent à travers de l'objectif, les réunit en autant de points différents dans le foyer & y forme cette image qui seroit bien parfaite, si réellement cette réunion se faisoit exactement en autant de points. Mais il y a deux obstacles à l'exactitude de cette réunion. Le premier étoit connu avant Newton, & dérive de la nature de la figure sphérique qui réunit plus près les rayons qui tombent vers le bord de l'ouverture de l'objectif que ceux qui tombent vers son milieu : le second obstacle, qui est beaucoup plus grand provient de cette différente réfrangibilité découverte par Newton, par laquelle les rayons, qui sont les plus réfrangibles, comme les violets, se réunissent plus près, que les moins réfrangibles, comme les rouges qui le font plus tard.

5. L'une & l'autre de ces deux causes à la place d'un seul point de réunion de tous les rayons partis d'un même point de l'objet, donne un petit cercle, & on appelle le premier obstacle l'erreur de sphéricité, le second l'erreur de réfrangibilité. La confusion de l'image formée par l'objectif dérive de ce qu'une partie du cercle appartenant à un point de l'objet tombe sur une partie de celui qui appartient à l'autre, ce qui fait la conjonction des rayons partis de différents points de l'objet ; mais cette confusion n'est pas sensible, que quand ces parties de ces cercles qui se joignent ont une densité de lumière bien sensible & pas trop inégale ; parceque quand celle d'un cercle est beaucoup plus forte que la partie de l'autre, la première efface & rend insensible l'impression de la seconde : il faut encore pour rendre sensible la confusion, que les points confondus soient assez éloignés entre eux pour rendre sensible leur distance : c'est alors qu'on y a une espèce de nébulosité, qui empêche la distinction d'une partie de l'objet par rapport à une autre, dont la distan-

distance devroit être sensible, & fait qu'on n'a pas ce qu'on appelle dans une bonne lunette, bien trancher l'objet.

6. Avant la découverte de Newton on avoit cherché de corriger l'erreur de sphéricité en substituant à la figure sphérique une autre courbe qui réuniroit exactement dans un seul point tous les rayons d'un même point de l'objet. Descartes en avoit déterminé la nature par un calcul très-compliqué : Newton l'a fait par une analyse géométrique très-simple, & il en a tiré une construction synthétique aussi très-élegante. Dans un de mes anciens ouvrages j'en ai donné une construction mécanique par des fils analogue à celle qu'on employe pour l'ellipse, & elle est assez simple, quand la raison des sinus de l'angle d'incidence & de l'angle réfracté est exprimée par des petits nombres comme de 3 à 2. Mais toute cette recherche étoit bien inutile pour l'usage ; parce qu'on ne peut pas donner cette figure assez exacte à la surface d'un verre, comme on lui donne la figure sphérique qui conserve l'attouchement exact avec le bassin en tournant la pièce en tout sens.

7. Newton a cru encore plus inutile de s'occuper de la correction de l'erreur de sphéricité après avoir comparé entre eux les diamètres de ces deux petits cercles : il a trouvé que dans un objectif dont la surface tournée à l'objet soit plane & l'autre convexe avec la convexité d'une sphère de 100 pieds de diamètre l'ouverture étant de 4 pouces & la raison des sinus 31 à 20 le diamètre du petit cercle formé par l'erreur de la différente refrangibilité étoit 5449 fois plus grand que le diamètre de celui de la sphéricité : comme il croyoit impossible de corriger la première erreur par des objectifs de verre, il a jugé qu'il étoit tout à fait inutile de songer à la correction de la seconde qui par rapport à l'autre dévenoit presque nulle, & il a substitué aux lunettes les télescopes, où les rayons sont réflechis par le miroir qui sert d'objectif ; parce que n'y ayant aucune séparation de rayons dans la réflexion qui les renvoye tous dans le même angle il n'y reste que la seule erreur de sphéricité.

8. Son

8. Son jugement sur l'impossibilité de la correction de l'erreur de la différente refrangibilité étoit fondé sur le résultat de plusieurs observations faites sur la force réfractive & dispersive de plusieurs substances, comme de plusieurs espèces de verre commun & de l'eau, qui lui donnoient à-peu-près le même rapport entre ces deux forces de manière que dans les cas qu'il avoit examinés la dispersion dévenoit toujours proportionelle à la réfraction. Celle-ci dans les petits angles contenoit $\frac{2}{55}$ de celle-là, ce qui revient à-peu-près à deux minutes de séparation des rayons extrêmes par degré de réfraction : un objectif, qui auroit détourné le premier rayon rouge dans un des points de sa surface de *6* degrés, auroit dû toujours y détourner le dernier violet de *6* degrés, & 12 minutes. Il a même cru généralement, que quand un rayon auroit été deplacé par une réfraction quelconque on y verroit toujours cette espèce de couleurs qu'on voit dans le spectre formé par un prisme; & quand il iroit à sa place, sans se détourner, il n'y en auroit jamais.

9. On voit bien dans cette hypothèse l'impossibilité de la correction de la première erreur dans les lunettes, qui sont fournies d'un objectif à réfraction. Celui-ci ne peut pas former l'image de l'objet dans son foyer, qu'en détournant par la réfraction les rayons partis du même point de cet objet vers celui, qui passant par son milieu continue sa route avec la même direction. Si la dispersion est toujours proportionelle à la réfraction, on en aura toujours une quantité correspondante, & on ne pourra jamais corriger cette dispersion sans anéantir aussi la réfraction, qui pourtant est necessaire pour la formation de l'image.

10. Voici la loi, que Newton croyoit générale. Si l'on appelle m la raison des deux sinus, c'est-à-dire, le quotient du sinus de l'angle d'incidence sous le quel le premier rayon rouge entre de l'air dans une substance, divisé par le sinus de l'angle réfracté, & $m + dm$ la même valeur pour le dernier violet, il a cru, que la quantité $\frac{dm}{m-1}$ étoit toujours la même pour toutes les substances, c'est-à-dire, la différence de ces deux valeurs tou-

jours $\frac{1}{27}$ de l'excès de la plus petite appartenante aux rayons les moins réfrangibles sur l'unité, & dépendamment de cette loi il avoit très-bien expliqué plusieurs phénomènes dépendants de l'Optique ; entre autres ceux de l'arc-en-ciel, & nommément sa largeur.

11. C'est M. Euler le pere, qui a proposé des doutes sur cette loi, & il en a substitué une autre dérivée non des observations, ou de quelqu'espèce de principes bien établis ; mais d'une simple analogie de calcul algébrique tout-à-fait arbitraire. Il avoit tiré de sa loi, qu'on pourroit en combinant plusieurs substances détruire la dispersion sans détruire la réfraction, suivant l'exemple de la Nature, qui a employé plusieurs substances transparentes pour former l'œil, & il a donné des formules, & des combinaisons pour des lunettes ; mais l'effet n'a pas répondu à son attente ; & on a découvert après la fausseté de sa loi.

12. Newton avoit tiré aussi de sa loi l'impossibilité de faire détruire la distraction sans détruire la réfraction, comme aussi, qu'on n'auroit jamais des couleurs au retour du rayon à sa place naturelle : mais M. Clingestierna en examinant plus au fond ce sujet s'est aperçu du défaut de cette déduction, en démontrant le contraire dans certaines combinaisons des prismes à grands angles, quoique dans de petits angles la proposition de Newton dépendamment de cette loi étoit sensiblement vraie. Il a bien vu, que comme dans les objectifs les inclinaisons des surfaces opposées forment toujours des angles bien petits, sa découverte ne pouvoit pas servir pour améliorer les lunettes, qui resteroient là, si la loi de Newton étoit vraie ; mais il a jugé, que tout ce sujet méritoit bien de nouveaux examens, & des recherches faites par des nouvelles observations.

13. Dollond le pere entreprit cette recherche, & il trouva que dans les verres communs la loi de Newton alloit bien à-peu-près, mais heureusement il tomba sur ce verre qu'on appelloit flint-glass, dans le quel la dispersion à parité de réfraction étoit plus grande que dans les verres communs, à-peu-près en raison de trois à deux. Il s'est aperçu tout de suite, qu'en combinant à propos une lentille

tille convexe de verre commun avec une concave de flint, on pourroit corriger la dispersion, en laissant la réfraction nécessaire pour former l'image. Dans le cas de la proportion de trois à deux, là, où la lentille convexe auroit plié en dedans le rouge de 6 degrés, le violet de 6 degrés & 12 minutes, la concave formée selon des règles données par la géométrie & le calcul pourroit plier le rouge en dehors de 4 degrés, & par conséquent le violet de 4 degrés, & 12 minutes; ainsi on y auroit pour tous les deux la même réfraction de 2 degrés en dedans avec leur réunion dans le foyer.

14. Selon cette théorie il a formé trois petits prismes, deux d'un verre qu'on appelle crown-glass, & il est analogue aux verres communs, & un de flint, avec des angles combinés de manière qu'en regardant les objets à travers d'un seul quelconque de ces trois, on les voyoit déplacés & bordés de couleurs: en les regardant à travers de celui de flint, & d'un des deux de crown, qui avoit l'angle presqu'égal à celui de l'autre, mais tourné en sens contraire, on les voyoit à sa place naturelle, mais aussi bordés de couleurs, la réfraction moyenne étant détruite sans la destruction de la dispersion: en y ajoutant le troisième, qui avoit l'angle à-peu-près la moitié des précédents tourné dans le même sens avec l'autre de crown, on voyoit les objets déplacés, & pourtant sans couleurs, la dispersion paroissant détruite, quoiqu'il y restoit une quantité de réfraction bien sensible. Comme il étoit aussi bon géomètre, il a trouvé des formules, par les quelles on avoit une telle combinaison de surfaces d'une lentille convexe de crown & d'une autre concave de flint, mais moins concave, que par son moyen on auroit formée une image au foyer de l'objectif, où non seulement on auroit réuni les rayons de différente réfrangibilité, mais on auroit corrigé aussi l'erreur de sphéricité. Il a construit des lunettes en conséquence avec des objectifs à deux seules lentilles, une convexe de crown, & l'autre concave de flint, qui ont fait d'abord beaucoup plus d'effet, que les communes à un objectif simple. On en a fait depuis à triple objectif, avec deux lentilles convexes de crown, & une con-

cave de flint, qui ont eu encore beaucoup plus de succès en corrigeant mieux non pas l'erreur de différente réfrangibilité, mais celle de sphéricité, qui répartie en quatre surfaces a besoin d'un nombre de degrés moins grand dans chacune, ce qui diminue l'effet des quantités d'ordres inférieurs, qu'on est obligé de négliger pour parvenir à des formules praticables pour la correction de cette erreur.

15. On a donné à cette espèce de lunettes le nom d'acromatiques, du mot grec, qui exprime *sans couleurs* : pourtant je les appelle à présent de même, pour suivre l'usage commun ; mais j'avois déjà démontré dans plusieurs de mes ouvrages, & je le démontre aussi dans ce nouveau volume, que ce nom ne leur convient pas, au moins à la rigueur, & cela par deux raisons. Premièrement l'objectif formé de deux seules espèces de substances, comme de flint, & de crown ne peut réunir, que deux seules espèces de rayons : les autres débordent beaucoup moins qu'auparavant, mais de manière que la dispersion des rayons causée par la différente réfrangibilité n'y est jamais totalement détruite. En outre ceux mêmes, qui sont réunis par un tel objectif, en sont séparés de nouveau par les oculaires, & cela toujours, quand il n'y a qu'un seul de ceux-ci. Il en arrive de même quand il y a plusieurs oculaires, si l'on n'employe une combinaison de ceux-ci capable de faire arriver à l'œil les rayons de ces deux espèces avec une même direction. Les couleurs, qui se voyent dans les lunettes ordinaires anciennes, dérivent beaucoup plus des oculaires, que des objectifs.

16. Je fais voir dans ce premier volume ce premier défaut, qui consiste dans l'impossibilité de réunir par deux seules espèces de verres, qu'on employe pour former ces objectifs, plus de deux couleurs à la fois : pour ce qui appartient aux couleurs causées par les oculaires, je le développe au long dans un autre Opuscule, qui appartient aussi à la théorie des lunettes sensiblement acromatiques, & même d'avantage, que d'abord j'avois destiné pour ce premier volume ; mais que j'ai été obligé de renvoyer au second après plusieurs additions, que j'ai jugé à propos

pos d'ajouter aux deux Opuscules précédents, sous le titre de supplements, où il y a des objets très-essentiels pour le même sujet.

17. La diminution qu'on obtient de l'erreur de réfrangibilité par l'objectif composé, & par une combinaison convenable d'oculaires donne des lunettes, qui ont un très-grand grossissement, & tranchent bien l'objet, sans que l'œil y aperçoit la moindre apparence de couleurs, sur-tout quand le champ de la lunette n'est pas trop grand; mais on les voit bien dans les bords de l'image du soleil transmise à travers la lunette. Pourtant j'appelle ordinairement correction, & même destruction de l'erreur de réfrangibilité, cette grande diminution, comme aussi j'en fais de même par rapport à l'erreur de sphéricité, quand elle y est anéantie rélativement aux formules, qui la contiennent, trouvées après avoir négligé les pétites quantités d'ordres inférieurs; quoique cette correction n'est jamais tout-à-fait exacte.

18. L'erreur de sphéricité par rapport à l'objectif ne fait que causer une espèce de confusion dans l'image, qui se forme dans son foyer, quand cette erreur est assez grande, & j'en ai fait mention ci-dessus au num. 5. La même erreur par rapport aux oculaires fait le même effet d'apporter de la confusion dans l'image de l'objet au fond de l'œil à cause du mélange, qui s'y forme des rayons partis de ses différents points; mais elle en ajoute un autre, qui est très-pernicieux, de défigurer le même objet en courbant ses lignes droites. Je fais voir ce second effet dans cet autre Opuscule, qu'on trouvera dans le second volume, où je parle aussi des remèdes.

19. Mais pour ce, qui appartient à la confusion de l'image formée par l'objectif, je trouve, que cet effet même par rapport à celui qui est causé par l'erreur de réfrangibilité, est beaucoup plus fort, que il n'a été jugé par Newton, & cela pour deux raisons. Premièrement, parceque si l'on donne la même grande ouverture à l'objectif d'un foyer (*) beaucoup plus court, que

(*) Tout le monde sait, qu'on appelle foyer le point, dans [illegible] une lentille réunit les rayons de lumière partis d'un point de l'obj[illegible] [illegible] foyer est [illegible] [illegible]oi-

que l'employé par lui, comme on le donne aujourd'hui aux lunettes acromatiques ; on trouve le rapport des diamètres des petits cercles de ces deux erreurs incomparablement moins éloigné de l'égalité, ce que je fais voir dans le dernier supplement de ce volume par un calcul exact, & en outre parce qu'il y a une très-grande différence essentielle, que j'ai trouvé dans ces deux erreurs. Newton avoit comparé la seule grandeur des diamètres de leurs petits cercles : il avoit cherché aussi la progression de la densité de la lumière dans les différents points du cercle de l'erreur de réfrangibilité, & il avoit trouvé qu'elle est infinie dans le centre, & en allant vers la circonférence elle diminue de manière qu'elle s'évanouit tout-à-fait sur la circonférence même. Le même problême est beaucoup plus difficile à résoudre par rapport au cercle de l'erreur de réfrangibilité. J'ai été assez heureux pour tomber sur une méthode, qui par la géométrie linéaire, & par le simple calcul algébrique m'en a donné la solution, avec un résultat très-simple, & qui forme cette grande différence. Je trouve, que la densité de la lumière dans ce cercle est infinie au centre, qu'elle diminue en s'en éloignant, mais de manière qu'elle arrive à son minimum là, où le quarré de la distance est la moitié du quarré du rayon du même cercle : elle augmente après de nouveau tellement qu'en s'approchant à l'infini de la circonférence elle va une autre fois à l'infini, & que même dans son minimum elle est assez forte; parcequ'elle y est égale

éloigné plus, ou moins de la lentille, selon que sa courbure est au contraire plus petite, ou plus grande, & le point de l'objet moins, ou plus éloigné : mais quand la distance du point lumineux est assez grande, en l'augmentant, tant qu'on veut, même à l'infini, la distance du foyer ne change plus sensiblement. On appelle absolument distance focale d'une lentille cette dernière distance, qui appartient à la rigueur aux rayons, qui arrivent paralleles ; mais on dit aussi lunette à long foyer, à foyer court celle, qui a cette distance longue, ou courte. Les lunettes ont un objectif à foyer long, & un, ou plusieurs oculaires à foyer court. Autrefois pour avoir un grand grossissement on étoit obligé d'employer des objectifs à foyer très-long, ce qu'allongeant immensement la lunette la rendoit très-incommode. Les lunettes acromatiques à présent exigent des foyers beaucoup plus courts.

égale à deux tiers de celle, qu'on auroit, si elle étoit par tout la même.

20. Il s'en suit de ces beaux théorèmes, que tandis que l'erreur de réfrangibilité ne fait pas une impression assez forte, que par sa partie peu éloignée du centre, l'autre de sphéricité la fait avec toute son étendue, & il efface l'effet de la première dans la plus grande partie de la sienne. J'ai donné cette solution dans une dissertation, qui est la troisième des cinq appartenantes aux nouvelles découvertes en Dioptrique, que j'ai fait imprimer à Vienne en Autriche l'an 1767, où les deux premières sont les mêmes, que j'avois donné dans les Actes de l'Académie de Bologne bien peu changées. Je donnerai dans le second volume la même dissertation, qui est très-essentielle pour le sujet de ces premiers volumes, & pour ce que je propose sur l'importance de la correction de cette erreur pour l'amélioration des lunettes. Cette proprieté de ce petit cercle me fait croire, que la grande superiorité de l'effet des lunettes acromatiques sur les anciennes à objectif simple dérive en très-grande partie de la correction de l'erreur de sphéricité, que la jonction de deux lentilles nécessaire pour former l'objectif acromatique a permis d'y introduire, tandis qu'elle ne peut pas être corrigée dans un objectif simple. Au reste je donnerai d'autant plus volontier ici cette ancienne dissertation, que dans l'édition de Vienne il y a plusieurs fautes d'impression, qu'il faut corriger, & qu'on a très-peu d'exemplaires de cette édition hors de l'Allemagne, ce qui la rend très-peu connue, quoique très-intéressante.

21. L'objet de ce premier volume est d'exposer d'une manière la plus élémentaire que j'ai cru possible la théorie de la correction de ces deux erreurs par la conjonction des lentilles formées des différentes substances. Il faut déterminer les rayons de sphéricité des lentilles capables de produire cet effet. Pour y parvenir il faut en premier lieu avoir une manière sûre, & aisée pour la pratique de trouver la force de ces substances, & en second trouver des formules, qui corrélativement à cette force donnent ces rayons rapportés à la distance focale, que l'on veut

veut avoir. Le premier de deux Opuscules de ce volume remplit le premier objet, en donnant un instrument propre à déterminer cette force, & la manière de s'en servir. Le second propose des formules telles, que M. Clairaut les avoit données dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour les années 1755, & 1756 imprimés l'an. 1762, mais que je démontre par une méthode un peu plus simple. Ici je les simplifie encore beaucoup en les réduisant à une forme beaucoup plus commode pour l'application du calcul numérique, & je donne des instructions pour leur usage, & des exemples.

§. II.

De ce qu'il faut déterminer, pour avoir les rayons de sphéricité des lentilles composées acromatiques.

22. POUR former un objectif, ou un oculaire acromatique de deux substances comme de flint-glass, & de verre commun il faut connoître leur force, par laquelle on détermine les courbures des lentilles, qui doivent les composer. J'appelle en général m la raison du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle réfracté (num. 2) pour un rayon quelconque, qui passe de l'air dans une substance transparente quelconque, c'est-à-dire, le quotient du premier divisé par le second, & pour la sortie de cette substance en l'air la raison sera la même inverse $\frac{1}{m}$. Chaqu'espèce de rayons a son m particulier par rapport à chaqu'espèce de substance: j'ajoute un accent à celui, qui a rapport à la substance, qui en parité de réfraction fait plus de dispersion, comme le flint, en l'appellant m', & j'appelle dm, dm' la différence des deux m, ou m' appartenants aux premiers rayons rouges qui sont les moins réfrangibles, & aux derniers violets, qui le sont le plus; mais pour ceux-ci je prend les derniers bien sensibles dans une mediocre obscurité.

23. Les formules que j'ai donnés dans le second Opuscule pour déterminer les rayons de sphéricité d'un objectif ou oculaire composé

posé capable de corriger à la fois les deux erreurs de réfrangibilité, & de sphéricité, n'ont besoin que des valeurs m, m' dont chacun soit le moyen entre celles qui appartiennent aux rayons extrêmes, qui sont les moins & les plus réfrangibles, avec la raison des deux dm, dm', c'est-à-dire, la valeur de la fraction $\frac{dm}{dm'}$, que je fais $= u$. Ces trois quantités sont le fondement de tous les calculs qu'on doit faire, pour déterminer la valeur des rayons de sphéricité que l'on cherche dépendamment des méthodes proposées dans ce second Opuscule, & dans son premier supplément.

24. Le second supplément a besoin des valeurs u correlatives encore à la différence des valeurs m, & m' appartenantes à d'autres binaires de rayons, comme à ceux du premier rouge, & d'une espèce déterminée intermediaire, comme d'une nuance de vert, pour réunir plusieurs espèces de rayons par le moyen de plusieurs substances. Le troisième exige la détermination de chaque valeur m, m' en particulier tant pour le premier rouge que pour le dernier violet pour déterminer la quantité des erreurs qui restent par rapport à l'union de ces rayons extrêmes dans un objectif composé selon ces formules qui ne sont pas tout-à-fait exactes à cause des quantités d'ordres inférieurs, qu'on est forcé à y negliger, & pour corriger ce reste, s'il se trouve assez considérable.

25. Les valeurs m, m' déterminent la force, ou bien la qualité réfractive des substances : on prend les valeurs dm, dm' pour mesure de leur qualité dispersive ; mais la qualité dispersive a rapport à la totalité des rayons de différentes couleurs, qui par l'inégalité de la réfraction sont dispersés par toute la longueur de celui qu'on appelle le spectre coloré formé par un prisme, & ici il s'agit de deux seuls de chaque binaire dont l'un est séparé de l'autre avec une divergence. Comme cela s'appelle en latin proprement *distrahere*, j'appelle celle-là *vim*, ou *qualitatem distractivam*, & puisqu'il y a en françois la parole *distraction*, je crois bien de pouvoir l'appeller aussi force, ou qualité *distractive*.

26. On a proposé plusieurs méthodes pour déterminer les valeurs *m*, *m'*, & le rapport des valeurs *dm*, *dm'* qui entrent dans les formules, & j'en examine quelqu'une dans le premier Opuscule, mais je donne la préférence à l'usage des prismes qui sont incomparablement plus commodes pour avoir ces valeurs avec une exactitude suffisante sur-tout quand on les employe de la manière que j'expose dans les paragraphes IX, X, & XI de cet Opuscule, & cela non seulement pour avoir les valeurs *m*, *m'* moyennes, & le rapport des différences *dm*, *dm'* qui répondent aux rayons extrêmes; mais aussi pour avoir la valeur *m* relative à une couleur intermediaire quelconque, & le rapport des valeurs *dm*, *dm'* relatives à un binaire de couleurs quelconque. On a parlé aussi de la réfraction du rayon blanc, mais sûrement mal-à-propos; parce que la réfraction du rayon blanc n'est pas une réfraction unique: il y en a autant qu'il y a des nuances de différentes couleurs: ainsi les méthodes proposées pour déterminer la qualité réfractive du rayon blanc ne donnent qu'une espèce de qualité qui a rapport à quelque rayon moyen, & ne peuvent pas donner tout ce qui est nécessaire pour les objets indiqués ci-dessus.

27. La détermination de chaque valeur *m*, *m'* pour les rayons intermediaires est beaucoup plus difficile que celle des rayons extrêmes, parce que comme le passage d'une espèce à une autre se fait par une nuance insensible, on ne peut pas distinguer dans le spectre un rayon d'un degré individuel pour prendre le même quand on en cherche la réfraction faite par une substance après l'autre: pourtant j'en ai trouvé le moyen, & expliqué au paragraphe X, & cela de manière à déterminer avec quelque précision même les différences *dm*, *dm'* appartenantes aux deux rayons d'un même binaire quelconque: mais l'observation pour avoir cela est assez compliquée, & exige une très-grande attention, & précision.

28. La détermination des valeurs *m*, *m'* pour les rayons extrêmes est beaucoup moins difficile, quand il n'y a besoin d'une précision très-grande. Mais alors les erreurs qu'on y laisse, peti-

petites par rapport à la valeur totale, ne sont pas petites par rapport à la difference dm, dm' qui est petite elle aussi par rapport au total; ainsi la raison u de dm à dm', qui est employée dans les formules, ne peut pas s'obtenir suffisamment exacte par la soustraction des valeurs m, m' trouvées de la sorte pour les rayons extrêmes. D'ailleurs cette détermination même moins exacte de ces valeurs relatives aux rayons extrêmes quoique facilitée par les méthodes que j'employe exposées dans cet Opuscule avec l'usage d'un petit prisme de chaque substance, qu'on veut employer, exige plusieurs mesures; dont la répétition pour chacun de ces prismes devient très-incommode.

29. Heureusement j'ai trouvé le moyen d'aplanir ces difficultés, & réduire la détermination des valeurs moyennes m, m', & $\frac{dm}{dm'} = u$, qui entrent dans les formules pour la détermination des rayons de sphéricité d'un objectif à deux substances, à une opération très-simple, & d'une exécution très-facile pour toutes les autres substances, quand on a trouvé seulement une fois les valeurs m, m' pour les rayons extrêmes dans une seule substance, dont je forme une espèce de prisme à angle variable, avec lequel je compare un petit prisme de chacune de ces substances. Avec celui-là un Opticien, qui ait de l'adresse, fourni d'un instrument dont la description, & l'usage fait l'objet du premier Opuscule, peut faire aisément chez lui des observations qui déterminent certains angles donnés par l'instrument même, avec lesquels un jeune écolier qui ait appri dans les premiers éléments d'algébre à substituer les nombres aux formules algébriques, puisse lui donner les mesures de sphéricité qui déterminent les bassins à employer pour travailler les verres, & cela sur-tout en opérant sur les exemples que j'expose au long dans le second Opuscule avec les formules réduites de manière à n'avoir besoin de faire aucune autre recherche, mais de suivre le seul mécanisme de ce calcul arithmétique.

§. III.

D'un instrument propre à déterminer aisément les qualités réfractives & distractives des différentes substances avec d'autres machines nécessaires pour son usage.

30. On voit cet instrument à la figure 9 de la planche II (*) dont la base a la forme d'un compas de proportion. Il y a dans la même planche un petit prisme à la fig. 10, & à la fig. 11 un autre instrument qui sert à diriger horizontalement le rayon du soleil, avec sa coupe à la fig. 12, & à la fig. 13 la forme de l'axe qui doit recevoir son miroir D de manière à avoir toujours son milieu vis-à-vis du petit trou C, qui donne le passage au rayon du soleil. A la planche III il y a d'autres petites machines destinées pour soutenir l'instrument principal, & pour disposer le local pour les observations. La planche I sert pour expliquer tout ce qui appartient au prisme variable, qui est formé par deux pièces de verre l'une plano-convexe, & l'autre plano-concave placées à la fig. 9 sur les bases P, Q de manière à avoir toujours un attouchement exact des surfaces courbes dans toutes les ouvertures de ce compas : en changeant cette ouverture on change l'inclinaison mutuelle des deux surfaces planes qui forment par-là des angles équivalents à ceux des différents prismes de la forme de celui de la figure 10, dont on a la mesure par la bande circulaire LM, & le nonius NO. Le cylindre XV donne le petit mouvement par le moyen d'une vis qui entre dans le prisme quarré R, quand on a arrêté le grand par la vis de pression en Y. En relâchant cette vis on laisse la liberté d'un grand mouvement à lui donner avec les doigts d'une main par les bouts A, B, tandis que l'autre comprime la branche CA contre la surface FH de la figure 14 (plan. III) pour la rendre im-

(*) On ne peut pas ignorer qu'en latin on appelle *Tabulæ* les Planches; ainsi on les désigne ici dans les planches mêmes par les lettres Tab. On les trouvera toutes réunies à la fin du volume.

immobile, avec sa pièce plano-concave qui reçoit le rayon, & dans ma méthode d'observer le doit recevoir toujours perpendiculairement à sa surface plane : tandis que la branche CA reste immobile par cette compression, l'autre CB par le grand ou le petit mouvement s'en approche, ou s'éloigne, en faisant glisser la pièce plano-convexe, & varier l'angle des deux surfaces planes. Deux lames DE, FG élevées perpendiculairement sur les surfaces de ces deux branches, & dirigées toujours au centre C, donnent la manière de mesurer en grand par les bandes LM, NO avec beaucoup d'exactitude l'angle d'un prisme quoique bien petit, comme celui de la fig. 10, en fourrant sa pointe A entre ces lames, & donnant au compas l'ouverture qui fait toucher exactement les surfaces FDAC, EDAB par les mêmes lames; parce qu'on dispose le nonius de manière à marquer zero, quand le compas fermé porte ces deux lames à l'attouchement.

31. Tout cela est expliqué en détail : ce qui appartient aux pièces du prisme variable au §. II après les notices préliminaires du §. I, qui est analogue aux deux premiers de cet Extrait. Au §. III on a la base de l'instrument, qui est cette espèce de compas, & les bandes circulaires pour la mesure des angles : au §. IV les deux bases P, Q, qui servent à élever le prisme variable, & donner par-là le passage libre au rayon par-dessus le cylindre XV, & les lames DE, FG : au §. V le même cylindre avec ses vis : au §. VI les lames DE, FG avec une planchette K qui passe par-dessous de cette dernière, & sert à soutenir le petit prisme, quand on en mesure l'angle.

32. Au paragraphe VII on a les autres instruments, & machines indiquées ci-dessus. On commence par le petit tube de la fig. 11, qui a son miroir D appliqué à l'axe FI replié à angles droits, comme on le voit à la fig. 13, pour y recevoir l'épaisseur en DD' entre le fond & la ligne ponctuée, qui exprime sa surface polie de manière à la faire passer par l'axe FI. On voit dans sa coupe (fig. 12) deux poulies une plus grande en GG, & l'autre plus petite en N. Celle-ci tournée par le moyen de l'axe KN, fait tourner celle-là par le moyen d'un fil qui va de l'une à l'au-

tre

tre en se croisant entre les deux, comme on entrevoit à la figure 11. La petitesse de la seconde rend le mouvement du miroir assez lent. On le fourre dans un trou rond du volet de la fenêtre jusqu'à ML: le derrière jusqu'à BA reste dans la chambre obscure : il y a là le couvercle AB qu'on peut retirer pour y voir en dedans, & diriger le rayon entier de manière à le faire aller vers le milieu : en le remettant on en fait passer une petite partie par le trou C. On dirige le rayon comme on veut par le double mouvement du tube sur son axe, & de la poulie N sur le sien.

33. Dans la figure 14 on voit une espèce de console qu'on applique au volet de la fenêtre un peu au-dessous du trou K, qui doit recevoir le tube de la figure 11. On employe pour cela un crampon L (fig. 15), & la lame M percée & attachée à la même console de manière à faire rester à-peu-près horizontale sa surface supérieure ABC (fig. 14). On pose sur cette surface une petite planche FH garnie de quatre vis, qui doit recevoir l'instrument de la fig. 9 : par le moyen de ces vis on donne au même instrument la position que l'on veut pour diriger le rayon libre à une ligne à-peu-près horizontale tracée sur le mur opposé, sur laquelle après on doit prendre la mesure des effets de la réfraction des prismes interposés tous seuls, ou sur le même instrument. Tout cela est détaillé plus au long dans l'Opuscule ; mais on le conçoit aussi aisément dans le présent abrégé.

34. J'ajouterai seulement qu'on voit bien sur la planche I à la figure 1, & 2 la pièce plano-convexe, & la plano-concave du prisme variable. On peut faire, comme on la voit, beaucoup plus courte cette seconde qui doit rester immobile après avoir reçu le rayon : on peut faire l'autre d'un arc de 20 à 30 degrés, sur un rayon d'environ six pouces, qui rend assez sensible le changement de l'angle pour le degrés & minutes, & une longueur de la pièce assez propre pour l'objet. Un arc d'un plus grand nombre de degrés avec ce rayon exigeroit une épaisseur de la pièce trop forte, un plus petit donneroit trop peu de variation à l'angle. Si l'on fait cette pièce de 25 degrés, on y aura commo-

modement la variation de l'angle de 20 degrés en y laissant un arc commun assez grand pour y faire passer le rayon d'une surface plane à l'autre. On peut avancer les limites de cette variation, en adossant à la pièce plano-concave un petit prisme fixe de la même matière, comme on le voit à la figure 5. Le seul prisme variable donneroit une échelle depuis zero jusqu'à 20 degrés: en y ajoutant un prisme fixe de 20 degrés, & ramenant la pièce plano-convexe au parallelisme, on l'aura depuis 20 jusqu' à 40: un autre pareil adossé au précédent la donneroit depuis 40 jusqu'à *60*.

35. On peut coller avec de la cire, ou autrement les deux pièces sur les bases P, Q de la figure *9* de manière, que les deux surfaces planes restent paralleles entre elles au bout gauche de la pièce plano-convexe, comme à la figure 3, ou au bout droit comme à la figure *6*, & cela de manière que ce parallelisme se trouve à quelque nombre de degrés de l'ouverture du compas de la fig.*9* à fin de pouvoir faire naître l'angle des surfaces planes d' un côté & de l'autre en fermant l' instrument & l' ouvrant, ou viceversa. On voit ces angles aux figures 4, 5, 7, 8 en Q: Il suffit d'arranger les pièces de manière à avoir d'un côté un angle de peu de degrés, & de l'autre au moins d'une vingtaine. La mesure de l'angle sera toujours la différence de ce que le nonius marque dans le cas du parallelisme, à ce qu'il marquera à toute autre ouverture: pour cela il faudra toujours commencer dans presque tous les usages de l'instrument par déterminer le nombre des degrés & minutes du parallelisme, si l'on n'a bien fixé les deux pièces, & bien determiné une fois pour toujours ce nombre: on le détermine aisément, en marquant sur le mur la place du rayon direct, le faisant passer après par le prisme variable, & ouvrant celui-ci de manière, que ce rayon revienne à la même place. Mais pour éviter l'embarras du mouvement de l'image du soleil formée sur le mur par ce rayon, on peut la fixer par le moyen d'un espèce d'héliostate, dont je parle au même paragraphe VII, machine qu'on forme très-aisément, & avec très-peu de dépense.

35. Il

36. Il faut donner aux bases P, Q de la fig. 9 une courbure à-peu-près égale à celle des deux pièces de verre, & les placer de manière que le centre des surfaces courbes tombe sur le point C du compas, qui doit être exactement le centre des surfaces courbes des deux pièces de verre. Je donne dans le paragraphe I plusieurs moyens pour connoître exactement ce rayon, & dans le paragraphe XVI un exemple du cacul numerique relatif à cette opération : mais quand on l'a par un à-peu-près, on trouvera mécaniquement la juste position de ces pièces, en les poussant un peu en avant, un peu en arriere jusqu'à ce qu'on voit, qu'en ouvrant, & fermant le compas les deux surfaces restent toujours dans un attouchement exact.

37. On fait l'héliostate connu avec une espèce de pièce d'horologerie qui coûte beaucoup, & exige un local particulier qui ne se trouve pas toujours pour être employé. Le mien est très-simple : c'est un pied de la hauteur un peu moindre de l'élévàtion du trou du volet de la fenêtre qui soutient une planche horizontale, & une autre verticale fixée au bord de celle-ci: la planche verticale a une petite fenêtre, devant laquelle il y a une planchette qu'on peut faire aller un peu à droite & à gauche, comme aussi élever, & baisser : cette planchette a un petit trou pareil à celui de l'instrument de la fig. 11. On place l'héliostate entre le trou de la fenêtre, & le mur: on y fait tomber l'image du soleil formée par le rayon qui passe par le premier trou. Cette image à cause du diamètre apparent du soleil devient beaucoup plus grande, que le second trou, par lequel n'en passe qu'une petite partie, qui và sur le mur : elle y reste immobile tout le temps que l'image avançant ne quitte le même second trou, ce qui peut durer presque deux minutes. En attendant on fait son observation sur le rayon immobile. Quand l'image est prête à quitter le même trou, on la rappelle en arriere par soi même, ou par un adjoint par le moyen d'un petit mouvement donné au tube de la figure 11, & à son miroir.

38. On voit à la planche III une petite machine (fig. 16) qui sert à déterminer sur la ligne horizontale tracée sur le mur le point,

point, sur le quel tombe une ligne perpendiculaire qui part du centre du trou de la figure 11. On croiroit de pouvoir déterminer ce point en faisant partir un fil du centre de ce trou, & en le portant sur deux points de cette ligne, ce qui forme un triangle isoscèle, dont la base est la partie de la même ligne interceptée entre ces deux points ; mais l'inégalité inévitable de la tension de ce fil empêche le succès de cette méthode. Je fais fixer deux règles de bois EE', GG' de quatre ou cinq pieds de longueur l'une sur l'autre à-peu-près à angles droits du côté de G' par le moyen des transversales H, H'. Ayant attaché deux épingles aux deux extrêmités d' une autre à une distance un peu plus grande, je porte la pointe de la première sur un point F pris vers le milieu de la règle GG' à côté du bout G, je détermine avec l'autre sur le bord EE' deux points L, L': je coupe l' intervalle LL' par le milieu en G', & tendant un fil depuis F jusqu'à G', je marque dans cette direction un point F' pas trop éloigné du point G'. Je suis sûr qu'une ligne droite qui passera par les points F, F' sera toujours perpendiculaire à la ligne EE' en G'.

39. Alors en faisant sortir un fil du centre du petit trou de la fig. 11 je le tiens tendu & appliqué au point F' en appliquant le côté EE' sur la ligne du mur, & le promenant à droite, & à gauche jusqu'à ce que le même fil arrive à passer exactement par le point F. Alors je sais que mon fil est perpendiculaire à la ligne du mur, & j'y marque le point G', qui sera le point cherché.

40. La règle AB de la fig. 17 avec la pointe BC servira pour avoir la distance exacte du point du prisme, d'où le rayon passé par le trou de l'héliostate sort du prisme, au mur : je place l' héliostate à une distance un peu plus grande : j'appuye sur le mur le bout A de cette règle, & je tire le prisme jusqu' à ce que ce point arrive à toucher le point C. En ayant pris une fois pour toujours la longueur AC, je viens à savoir à chaque observation la distance de ce point du prisme au mur. En appliquant l'instrument de la fig. 16 à la ligne du mur, & le poussant

jusqu'à ce que la ligne AC passe par ces points F, F', je détermine, quand j'en ai besoin, même le point G', sur le quel tombe la ligne perpendiculaire tirée de ce point du prisme sur la ligne horizontale du mur.

41. M. Clairaut avoit employé une pièce plano-convexe pareille à la mienne de la figure 1 pour avoir une espèce de prisme à angle variable en faisant tomber un rayon sur ses différents points, où l'inclinaison de la tangente de la surface courbe faisoit un angle plus grand ou plus petit avec la surface plane selon la distance de ce point au milieu : mais l'inégalité de ces angles dans les différents points de la surface courbe occupée par le rayon, qui a une certaine largeur, rend l'image très-étendue, nuancée, & confuse. Le Pere Abat Opticien de Marseille a employé deux segments sphériques un plano-convexe, l'autre plano-concave à bases circulaires, qui donnoit l'image aussi nette comme un prisme simple ; mais l'usage pour déterminer les angles en est bien incommode. Je me suis servi de son idée qui est excellente, pour former la seconde pièce à joindre à celle de M. Clairaut, qui est dévenue très-commode pour la placer sur l'instrument que j'ai imaginé, & pour m'en servir de la manière, qu'on verra dans les paragraphes suivants.

§. IV.

Premier usage de l'instrument proposé, pour voir la naissance des couleurs du rayon blanc, & l'inversion du spectre.

42. J'ai exposé bien au long cet usage au §. VIII. Quand on a fait passer le rayon par le trou de l'instrument de la figure 11 perpendiculairement au mur on y voit l'image du soleil ronde, & blanche. On y applique l'instrument avec le prisme variable réduit au parallelisme ; on la voit à la même place blanche, & ronde. On ouvre ou ferme le compas d'avantage. On voit l'image partir à droite ou à gauche, & prendre des couleurs dans les deux bords : celui qui est plus près de la place naturelle est rou-

rouge, l'autre opposé violet : le milieu reste blanc : chaque espèce de rayons colorés fait son cercle : le violet le plus réfracté s'éloigne le plus de sa place naturelle : dans le milieu la grandeur des cercles laisse un mélange de toutes les couleurs, qui forme le blanc : on ne voit que les premières rouges, & les dernières violettes bien séparées.

43. En augmentant ou diminuant beaucoup plus l'ouverture de l'instrument on voit les couleurs se développer beaucoup plus les unes après les autres. On voit un développement encore plus grand si l'on aide le prisme variable avec un fixe adossé comme IKL à la figure 5, & beaucoup plus si l'on en ajoute deux. Si l'on employe l'héliostate qui diminue le diamètre de l'image, on voit ce développement beaucoup plus grand, & plus tôt. Le blanc du milieu disparoît lorsque l'intervalle entre les centres du cercle rouge & du violet arrive à être plus grand que leur diamètre.

44. Dans les autres prismes on voit le spectre né; ici on le voit naître du blanc. En ouvrant & fermant l'instrument, le spectre se promene : toujours le bord violet est le plus éloigné de la place naturelle, le rouge le moins. En passant par la place naturelle on passe par la totalité du blanc, & l'ordre des bords colorés se change : le violet du côté droit passe au gauche, & le rouge du côté gauche au droit, & viceversa, avec une espèce d'inversion du spectre, ce qui arrive à tout passage par la place naturelle.

§. V.

Second usage : détermination de la qualité réfractive, & distractive de la substance du prisme variable, & confirmation de la loi principale de la Dioptrique.

45. On voit cet usage au paragraphe IX. Il s'agit ici de trouver les valeurs *m* du premier rayon rouge & dernier violet appartenantes à la substance du prisme variable pour en tirer la valeur *m* moyenne & *dm*. Voici la méthode pour y parvenir. Dans la figure 18 AA' est le trou du couvercle de l'

instrument, qui porte le miroir, GG' le trou de l'héliostate DD' sur le quel les rayons du soleil SAC, S'A'C' partis des deux bords de son disque, qui se sont coupés en E, forment en CC' son image beaucoup plus grande que le même trou. Les rayons *s*AG, *s*'A'G' qui se coupent en F passent, & quand il n'y a encore le prisme MKL portent une partie de cette image sur la ligne OO' du mur en HH': *i* est le point de cette ligne sur lequel tombe la ligne perpendiculaire tirée du centre I du trou AA': *ia*, *ia*' sont des petits intervalles égaux au deux demi-diamètres IA, IA' du même trou. En faisant que le bord H de l'image tombe sur le point *a* de manière que l'intervalle *aa*' reste hors de la même image on est sûr que le rayon AGH tombe perpendiculairement sur la ligne OO', & on peut faire aller là ce point de l'image par le mouvement qu'on donne à la planchette de l'héliostate qui porte le trou GG'.

46. Dans cet état on place l'instrument qui porte le prisme variable ou un autre prisme fixe quelconque dont l'angle soit MKL de manière que sa pointe K aille du côté du point H, & que son côté KL, qui reçoit le rayon AG, lui soit perpendiculaire, ce qu'on fera aisément en regardant l'image formée en VV' par les rayons tombés sur le prisme en NN' & réflechis par sa première surface à côté du trou GG' en VV'. En tournant l'instrument sur la planche horizontale de l'héliostate ou sur la surface supérieure de la petite machine de la fig. 14 garnie des quatre vis, & en réduisant cette surface à la position réquise pour cet effet par le moyen des mêmes vis, on fait aller cette image sur le trou & son point H sur le point *a*. Le rayon GN continue de même jusqu'à la seconde surface en P, mais détourné par la réfraction va après sur la ligne OO' en T : l'autre G'N' après une très-petite réfraction en N' est aussi détourné en P' & va en T' où on a le spectre coloré en TT'. Comme le bord H est le moins éloigné de la place naturelle, le rayon PH est le premier rouge: sa réfraction est l'angle HPT : en mesurant la distance PH & HT on a la réfraction HT par sa tangente $\frac{HT}{PH}$ que j'appelle *r*.

47. Si

47. Si l'on conçoit la ligne RP perpendiculaire à la seconde surface KM prolongée jusqu'à la première en Q ; on voit bien que NPQ est l'angle d'incidence & qu'il doit être égal à l'angle du prisme K, puisque les triangles rectangles NPQ, PKQ ont l'angle en Q commun : ainsi si l'on appelle a l'angle du prisme, l'angle d'incidence sera $= a$: comme cet angle est égal à l'angle RPH, & l'angle RPT est l'angle réfracté ; celui-ci sera $= a + r$ & la valeur m pour le rayon premier rouge sera $\frac{sin.(a+r)}{sin.r}$, parce que dans la sortie du verre à l'air, le sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle réfracté est comme 1 à m.

48. On a ainsi la valeur m appartenante au premier rouge dans une substance quelconque par le moyen d'un petit prisme de cette substance dont on ait mesuré l'angle par cet instrument & les lignes PH, HT : on peut avoir la première aisément par la règle de la figure 17 en plaçant l'héliostate à une distance du mur un peu plus grande que cette règle qu'on placera horizontalement de manière que son bout aille en H & la pointe arrive à la surface qui soutient l'instrument : en approchant doucement celui-ci & parallelement à soi même, on l'amene au contact du point P d'où l'on voit sortir le rayon avec la pointe de la règle dont on a mesuré la longueur sur une échelle. On a aisément la ligne HT, si l'on fait une fois pour toujours une division sur le mur correlative à la même échelle en prenant le surplus dépuis la dernière division jusqu'au point T avec le compas, ce qui donne la ligne iT, & en ôtant la petite ligne ia connue une fois pour toujours, on a la ligne aT $=$ HT : le logarithme de celle-ci avec le complement logarithmique de la distance PH donne la tangente de la réfraction r, dont on tire cet angle, & la valeur $m = \frac{sin.(a+r)}{sin.a}$.

49. On obtient cette valeur d'une seule manière avec un petit prisme fixe : mais avec le prisme variable on en a tant de déterminations qu'on veut ; parce qu'ayant trouvé le parallelisme on ouvre le compas à une ouverture plus grande ou plus petite d'un nombre

de

de degrés que l'on veut, ce qui donne autant de fois la valeur *m*. Comme on la trouvera toujours presque la même avec quelque très-petite différence produite par l'impossibilité de déterminer toutes les mesures avec la dernière exactitude & par le trop peu de précision dans les bords du spectre toujours nuancés sur-tout du côté du violet, on aura une preuve de la règle principale de la Dioptrique qui consiste dans la raison constante du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle réfracté. La multiplicité des déterminations faites en employant différents angles du prisme variable donnera une sûreté & une proximité à l'exactitude de la valeur *m* prise de la moyenne arithmétique entre toutes les trouvées dans toutes les opérations répetées.

50. On fait la même chose à la figure 19 pour le dernier violet en faisant qu'avant l'interposition du prisme le point H' de l'image HH' aille en *a*' & en mesurant les lignes P'*a*', *a*'T'. Ainsi on a la valeur *m* pour le dernier violet avec la démi-somme de ces deux *m* qui est la valeur *m* moyenne, & la différence qui est la valeur *dm*. La première servira dans le second usage pour avoir la valeur *m* moyenne de toute autre substance en employant son petit prisme par une observation beaucoup plus facile & sans avoir besoin d'aucune mesure des distances & intervalles pris sur des échelles. La valeur *m* ainsi trouvée sera assez exacte pour s'en servir dans les formules : ce ne sera pas de même pour la valeur *dm*, parce que les erreurs portées par le mécanisme des opérations & par cette incertitude des bords du spectre, petites par rapport au total, ne le seront pas par rapport aux différences qui sont petites elles mêmes : heureusement on n'aura pas besoin des valeurs *dm*, *dm*' absolues appartenantes aux deux substances qu'on devra employer, mais le seul rapport $\frac{dm}{dm'}$, & on verra dans le troisième usage qu'on peut avoir par le moyen de cet instrument immediatement la valeur de ce rapport sans avoir chaque terme en particulier.

51. Toute cette théorie est expliquée plus au long dans le paragraphe IX, & dans le paragraphe XVII on a les exemples des ob-

observations & des calculs numériques avec la détermination des valeurs cherchées pour le verre de mon prisme variable.

§. VI.

Méthode pour faire la même recherche par rapport à chaque couleur intermédiaire avec l'application aux qualités distractives.

52. Le passage insensible d'un degré de couleur dans le spectre à un autre & même d'une couleur à l'autre, rend très-difficile la détermination de la valeur *m* pour les rayons intermédiaires de manière à pouvoir les reconnoître, quand on en doit comparer plusieurs entre eux relativement à des substances différentes, ce qui pourtant est nécessaire pour la réunion des rayons extrêmes avec des intermédiaires & même pour bien connoître la nature de la lumière par rapport à la différente réfrangibilité. Voici la manière que j'ai enfin trouvée pour y parvenir : on la voit plus détaillée au paragraphe X sur la figure 20.

53. Pour cet objet il faut employer deux héliostates, l'un en DD' qui reçoit en CC' comme dans les deux précédentes l'image du soleil transmise par le trou AA' & en laisse passer une petite partie par son trou GG', jusqu'à un premier prisme LKM en NN'. Ce prisme est placé devant ce trou de manière à pouvoir tourner autour d'un axe *b* qui amene avec lui une règle *be*: cette règle est appuyée à une planchette qui a des divisions comme dans un quart de cercle, ou sur laquelle on peut tracer avec le crayon des lignes qui marquent les différentes positions de cette règle & du prisme. Le rayon sort de sa seconde surface par les lignes P*t*, P'*t*', & forme le spectre coloré sur un second héliostate *dd'* en *tt'*. En tournant le premier prisme autour de son axe *b*, on voit le spectre *tt'* changer sa position par rapport au trou *gg'*, par lequel on laisse passer ce rayon coloré que l'on veut jusqu'au mur OO' en HH': après y avoir marqué le bord H on reçoit ce rayon par un second prisme *mkl* en *nn'* de manière que le

le point u de l'image uu' réflechie révenant au point g marque la position perpendiculaire du fil de lumière gn à la surface lk.

54. Ce prisme détourne le rayon de la position HH' en TT'. On fait que la distance perpendiculaire pX du point p au mur soit égale à la longueur de la règle de la figure 17 en amenant le même point p à sa pointe : à l'aide de la machine de la figure 16 en appuyant le côté AC de cette règle sur ces points F, F', on trouve le point X de la perpendiculaire pX : on prend la mesure des deux lignes XH, XT qui divisées par pX donnent les tangentes des angles XpH, XpT dont la différence est la réfraction $TpH = r$ dans le cas exprimé par la figure où les points T, H tombent tous les deux du même côté du point X : ce seroit la somme, si le point X tomboit entre ces deux points.

55. En changeant la position de la règle be on peut faire passer par le trou gg' autant de différents rayons colorés que l'on veut, & on aura pour chacun sa valeur m & la valeur dm qui convient à un binaire quelconque relativement à la substance de ce prisme. On reconnoîtra bien ces mêmes couleurs pour en faire autant par rapport à une autre substance avec un autre prisme ; si l'on remet la règle be aux mêmes positions par les marques qu'on a laissées, quand on a employé le prisme précédent. On peut s'assurer encore d'avantage du retour des mêmes couleurs individuelles, si à chaque observation du prisme précédent on marque la position du point t' où commence le spectre $t't$ par le premier rayon rouge qui est le plus distinctement visible, en faisant révenir ce bord à la même marque, quand on employe une autre substance.

56. De cette manière on aura les valeurs dm qui seront les différences de la valeur m du premier rouge à un nombre quelconque d'autres couleurs dans deux substances quelconque, ce qui en comparant les dm de l'une avec les dm' de l'autre donnera encore les rapports $\frac{dm}{dm'}$. Il faudra bien employer toute l'attention possible pour éviter les erreurs de l'observation assez grandes pour être sensibles par rapport aux petites différences dm : mais

mais on évitera ces erreurs plus aisément dans cette méthode; parce qu'en tenant immobiles les deux héliostates, le centre de l'axe *b* & le prisme *mkl* dans toutes les observations, on aura constamment immobiles les points H, *p*, X pour toutes les couleurs & toutes les substances: ainsi les différences ne dépendront que de la position différente du seul point T qui peut être marqué avec toute l'exactitude de manière à ne pas faire aucune erreur dans la différence de ses positions qui soit sensible par rapport à cette même différence. Cette méthode évitera les erreurs beaucoup mieux que celle du paragraphe précédent où l'on se servoit pour les rayons extrêmes des deux bords nuancés du spectre, tandis qu'en remettant la règle *bc* exactement sur les mêmes marques on sera sûr d'avoir toujours les mêmes espèces de rayons au point H poussées par la réfraction aux différents points T.

57. Cette méthode donnera le rapport des qualités distractives même indépendamment de mon instrument; mais elle exige les marques des points H, T & les mesures des lignes *p*X, XH, XT. Quand on aura trouvé toutes les valeurs *m* pour un nombre de rayons, comme une pour chaqu'espèce de couleurs, par rapport au prisme variable, on pourra par son moyen trouver beaucoup plus aisément les mêmes valeurs pour toute autre substance en employant la méthode qu'on verra ci-après, si l'on dispose le local de manière à pouvoir remettre exactement, quand on voudra faire les observations dans des jours différents, les deux héliostates & l'axe *b* à la même place, où tout cela étoit dans le temps des observations faites avec le prisme variable.

58. Les observations faites avec la méthode proposée serviront pour connoître beaucoup mieux la nature de la lumière & la différence de la réfrangibilité par rapport aux différentes couleurs, & différentes substances réfringentes. Newton a cru que la valeur dm relative au premier rouge & dernier violet divisée par $m-1$, étoit dans toutes les substances la même, qu'il faisoit pour les verres $\frac{1}{27}$ par rapport à la valeur m des premiers rouges. Pour la même valeur relative au premier rouge & au premier rayon de chacune des six autres couleurs il avoit trouvé une progression de

raison constante pour toutes les substances qui avoit une relation à la division du monocorde : cette progression étoit la même que celle qui devoit y avoir dans la division du speĉtre formé par le prisme dans les limites des intervalles qui répondoient à chaque espèce de couleur, & il la trouvoit telle dans cette division : mais il trouvoit bien que cela étoit par estime grossière & incertaine à cause du passage d'une espèce à l'autre par des degrés insensibles.

59. Dollond a bien trouvé que cette valeur *dm* étoit beaucoup plus grande dans le flint à-peu-près en raison de trois à deux : mais cette découverte ne s'opposoit point à l'analogie de la lumière avec le son, parce que cela alonge bien la totalité du speĉtre, mais ne touche pas à la division de sa longueur pour les différentes couleurs dans cette raison constante. Dans la seconde de mes anciennes dissertations j'ai fait voir par certaine inversion successive du speĉtre, dont nous parlerons après, que cette progression des valeurs *dm*, cette division du speĉtre doit être différente dans les différentes substances, sur les quelles j'ai fait mes observations, & que cela empêchoit la réunion de plus de deux différentes couleurs par deux substances, tandis que la raison constante porteroit la réunion des toutes, quand on en auroit réuni deux.

60. Si l'on prend sur une ligne droite dans la fig. 21 de cette planche IV les abscisses AB, AC, AD... AG proportionnelles aux valeurs *dm* relatives au premier rouge comparé avec les autres couleurs dans une substance ; en élevant les ordonnées BB', CC', DD'... GG' proportionnelles aux mêmes valeurs dans un autre on auroit une ligne droite dans la supposition de la raison constante, & une courbe dans la raison variée, & j'y ai donné une méthode indireĉte analogue à la méthode des interpolations pour déterminer cette courbe qui a un grand usage dans cette inversion successive du speĉtre. Mais ici on peut déterminer la même courbe direĉtement par la méthode des observations proposées que j'ai imaginé depuis. En prenant ces abscisses proportionnelles aux valeurs *dm* trouvées pour une substance, comme de verre

com-

commun, & les ordonnées proportionnelles aux *dm'* pour une autre, comme de flint, on a autant de points de la courbe que l'on veut. Deux binaires de valeurs *dm* trouvées pour le premier rouge comparé avec le dernier violet, & avec un intermédiaire, comme un vert, ne se trouvant pas en une même raison entre eux dans les deux espèces de verre suffisent pour démonstrer la fausseté de l'analogie Newtonienne de la lumière avec le son. Si elle y étoit dans une substance, comme Newton l'avoit trouvé par un à-peu-près, elle ne pourroit avoir lieu dans l'autre.

§. VII.

De la manière de trouver les rayons de sphéricité d'une lentille déjà formée, & la valeur m moyenne de son verre.

61. Dans le §. XI il y a des réflexions sur les deux précédents, avec des raisons pour donner la préférence à ma méthode d'employer les prisme sur une autre communement adoptée, & aux prismes sur les lentilles; mais il y a une méthode pour connoître les rayons de sphéricité d'une lentille déjà formée, & la valeur *m* de son verre, qui par l'invention de cette valeur appartient au sujet de la recherche présente, & par la détermination des rayons de sphéricité est bien intéressante sur-tout pour voir si la lentille travaillée a reçu de l'Ouvrier la forme qu'on lui avoit donnée après le calcul, pour corriger la surface qui se trouve défectueuse.

62. Si la lentille est concave de deux côtés, on trouve le rayon de sphéricité de chacune de ses surfaces par le foyer des rayons réflechis formé à côté du point d'où ils sont partis. Si l'on place à travers le trou de la machine de la figure 11 un fil de soie, & qu'on fasse aller le rayon du soleil à l'aide du miroir sur la surface concave placée vis-à-vis de ce trou, on pourra faire aller sa partie réflechie à côté du même trou, & en approchant & éloignant la lentille on trouvera la distance, qui donnera

 l'ima-

l'image du trou & du fil bien distincte. Cette distance sera le rayon de sphéricité.

63. Si la lentille est convexe de deux côtés, on trouvera de même le foyer des rayons réflechis par celle de ses deux surfaces qui après leur passage à travers la première ils trouvent la seconde convexe vers l'air, mais concave vers le trou : en tournant la lentille on trouvera ainsi deux de ces foyers réflechis. On aura un troisième foyer des rayons paralleles passés directement par les deux surfaces, qui est la distance focale de la même lentille : on le trouve plus exactement, si l'on se sert du même fil de soie, & qu'en tenant la lentille à une distance suffisante du trou on prend son image, & celle du fil sur un plan tenu au de-là. On aura alors le foyer des rayons divergents : mais si l'on détermine bien exactement les deux distances de la lentille au trou, & à ce foyer, le produit de la multiplication de ces deux distances divisée par la somme donne la distance focale cherchée qui répond aux rayons paralleles.

64. On trouvera beaucoup plus exactement la distance de chacun de ces foyers, si l'on couvre le trou d'un papier blanc, en posant le fil de soie sur ce papier devant le trou : on trouvera une distance qui donnera très-distinctement dans l'image ces petits poils qui sortent de tout côté de ce fil : en approchant tant soit-peu la lentille, ou en l'éloignant du trou dans le cas du foyer réflechi, & dans celui du foyer direct le papier de la lentille, on verra disparoître ces petits fils. Ainsi on aura trois distances, deux des foyers réflechis à côté du trou, & la troisième du foyer direct des rayons paralleles.

65. Si l'on nomme u la distance du foyer direct des rayons paralleles, u', u'' les distances de foyers réflechis formés en tournant au trou les surfaces qui ont les rayons des sphéricités a, b; on trouvera premièrement les valeurs a', b', m', qui auront besoin d'une petite correction relative à l'erreur produite par l'épaisseur de la lentille : elles seront données par les formules suivantes $\frac{1}{a'} = \frac{1}{u'} - \frac{1}{u}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{u''} - \frac{1}{u}$, $\frac{1}{m-1} = \frac{u}{u'} + \frac{u}{u''} - 2$.

66. Pour

66. Pour la correction ayant appellé *e* l'épaisseur de la lentille on fera $\frac{1}{q'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{m'\alpha}$: alors on aura $\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} - m'\alpha(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{q'^2})$; $\frac{1}{b} = \frac{1}{b'} - m'\alpha(\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{q'^2})$; $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $m - 1 = f(\frac{1}{u} - \frac{m\alpha}{q'^2})$. J'ai démontré ces formules dans la première de mes anciennes dissertations indiquées ci-dessus, où j'ai donné aussi des règles pour les menisques qui ne peuvent avoir qu'un seul foyer réflechi ; mais leur usage est beaucoup plus rare, & il n'y en a pas dans aucune des combinaisons proposées dans cet ouvrage. Quand on tourne une lentille quoique de sphéricités différentes, on trouve sensiblement le même foyer direct, mais les deux réflechis ne peuvent pas être égaux que dans le cas d'une lentille isoscéle. Par-là on s'appercevra plus facilement du défaut d'une lentille que l'Ouvrier aura dû former, & si l'on trouve l'égalité, on commencera à se rassurer sur l'exactitude du travail ; mais cela ne suffira pas : il faudra voir, si la longueur de ce foyer est celle qu'on devoit y trouver.

§. VIII.

Troisième usage : la détermination de la qualité réfractive des autres substances.

67. On explique cet usage au §. XII. On fait faire un petit prisme de cette substance comme EDO de la fig. 22 de la même planche, on en trouve l'angle, & on l'adosse à la petite pièce MLNO du prisme variable placé sur l'instrument dont on a déjà trouvé le parallelisme. Ayant fait passer comme à la fig. 18 une partie de l'image par le trou de l'héliostate sur un endroit quelconque du mur en HH', & marqué ses bords H, H' par deux lignes verticales qui la touchent, on l'intercepte par ces deux prismes réunis de manière que la surface DE du fixe adossé reçoive le rayon à angles droits, ce qui sera indiqué par le retour de l'image réflechie au trou. Si le prisme variable est dans son parallelisme ; on voit l'effet du seul prisme fixe : en faisant naître

tre l'angle du variable contraire à celui du fixe, l'image colorée révient à sa place primitive entre les deux lignes verticales marquées : il faut écrire l'angle donné par le nonius dans cette position : cet angle appellé b avec celui du prisme fixe $= a$, & la raison des sinus trouvée pour le prisme variable, que je fais $= M$ pour laisser m, & m' pour les deux verres, qui doivent composer l'objectif acromatique, donne la valeur m par les formules suivantes.

I. $sin.(b - x) = \frac{1}{M} \times sin.(b - a)$ II. $m = \frac{M\,sin.x}{sin.a}$.

68. J'ai démontré ces formules avec d'autres, que nous aurons pour la qualité distractive, dans la première de mes anciennes dissertations. J'en ai déduit une autre plus simple qui est moins exacte ; mais qui ne porte aucun erreur sensible, lorsqu'il s'agit des prismes de verre. Ayant fait $h = b - a$, $n = h - \frac{h}{M}$, on aura $m = M + M\,sin.n\,cot.a$. La démonstration dépend de la théorie du rayon, qui arrive perpendiculairement à la première surface de deux prismes contigus d'angles tant grands que petits : j'ai mis ici cette théorie réduite encore un peu mieux pour la seconde partie dans le premier supplément du premier Opuscule. Cette perpendicularité à la première surface m'a rendu les formules très-simples, tandis que d'autres en employant les prismes ont eu besoin des suites qui expriment les angles par les sinus, ce qui rend les formules beaucoup plus compliquées, & ne peut servir que pour des angles bien petits, où les petites erreurs commises dans leur mesure ne dérangent trop le résultat. En faisant entrer le rayon perpendiculairement à la première surface il continue son chemin sans qu'il y ait que deux réfractions, une en passant du premier prisme au second, l'autre en passant du second à l'air, ce qui donne ce grand avantage. D'ailleurs on peut s'assurer de cette perpendicularité par le retour du rayon au trou.

69. Quand le prisme fixe est de la même espèce avec le variable, l'image revenue à sa place naturelle se trouve blanche ; & si les

si les surfaces sont bien planes, de la même grandeur primitive, le prisme d'une substance différente la rend colorée & un peu plus grande, ce que fait voir le défaut de l'assertion de Newton dont nous avons fait mention ci-dessus, que quand la réfraction moyenne est détruite de manière que le rayon révient à sa place naturelle, il n'y a point de couleurs : si l'un est de flint & l'autre de verre commun, il y a beaucoup de couleurs, & si les surfaces sont bien planes, l'image colorée est considérablement alongée & déborde des deux lignes tracées : si les surfaces ne sont pas exactement planes, l'image par-là aussi peut dévenir plus grande, même encore plus petite : dans ces cas il suffira de faire que le milieu de cette image aille sensiblement au milieu entre les deux lignes verticales. Si les surfaces planes ne sont pas bien exactement perpendiculaires sur ses bases bien horizontales, l'image ira un peu plus en haut ou en bas par rapport au lieu de l'image naturelle : mais alors aussi on ne fera pas une erreur sensible dans la valeur *m* moyenne, si l'on fait révenir le milieu de cette image au milieu entre les deux lignes verticales.

70. Ayant bien marqué les deux limites B, B' de l'image naturelle on peut prendre séparément l'angle du prisme variable qui fait venir le bord rouge de cette image à celle des deux lignes, qui reste par rapport à l'autre du même côté, & l'angle qui fait venir le bord violet sur celle-ci : par le premier de ces deux angles pris pour *b* avec la valeur M du variable, qui répond aux rayons rouges, on trouvera la valeur *m* des rouges relative au prisme fixe : l'autre angle pris pour *b* avec la valeur M des violets par rapport au variable donnera la valeur *m* du fixe pour les violets. Mais la détermination de la valeur *m* moyenne prise par le retour du milieu de l'image au milieu entre les deux lignes sera moins défectueuse.

71. On aura plus exactement les valeurs *m* d'un rayon quelconque, même un des intermédiaires, si l'on a déterminé avant les valeurs M pour ces rayons relatives au prisme variable par le double héliostate de la fig. 20 & bien marqué la position de la règle *bc*, & de tout le reste pour ce même rayon. Ayant remis le

le tout à la même place on fera passer le rayon de la même espèce par le trou *gg* en marquant la place H qu'il prend lorsqu'il n'y a de prisme : on mettra le variable avec le fixe adossé comme auparavant, & on fera révenir le même rayon à cette même place, en marquant l'angle du variable. Cet angle pris pour *b* avec la valeur M qui lui répond dans le prisme variable donnera sa valeur *m* relative au fixe. Ainsi sans avoir le soin de bien marquer le point T, & bien mesurer la distance *p*X, les distances XH, XT, sans chercher la valeur *r*, &c. on aura par une opération beaucoup plus simple, & facile à exécuter, & moins sujette à des erreurs autant de valeurs *m* pour autant de rayons différents qu'on voudra, & par-là autant de valeurs *dm* d'autant de binaires qu'on voudra ; pour déterminer la courbe de la figure 21, qui répondra à tel binàire de substances qu'on prendra à volonté.

72. Il ne reste que de remarquer qu'on peut avoir de même la qualité réfractive pour une espèce de fluide transparent quelconque. On fera un prisme de la forme de celui de la figure 10 vide en dedans, c'est-à-dire, qui aura deux parois FDAC, EDAB de deux lames de verre à surfaces bien planes, bien polies, & bien paralleles, avec la base BAC, & le derrière EBCF comme on veut même de verre brut, ou de métal. On pourra déterminer l'angle contenu par les lames polies, & en y mettant dedans le fluide on aura un prisme de celui-ci, qui sera le même que celui de ces lames : on fera avec celui-là les mêmes expériences.

§. IX.

Quatrième usage : la détermination de la qualité distractive des autres substances.

73. On a cet usage au §. XIII. On peut avoir par la méthode proposée ici dans le paragraphe précédent la qualité distractive par rapport à tel binaire de rayons qu'on veut ; mais par une opération plus compliquée avec l'usage de deux héliostates, par le quel on aura trouvé les différents valeurs *m* relatives au pris-

prisme variable, & en remettant tout exactement dans la même position. On aura ici par une opération plus simple la qualité distractive d'une autre substance quelconque par rapport aux rayons extrêmes, mais encore plus exactement le rapport des qualités distractives de deux substances qu'on veut employer, qui est le seul nécessaire pour les formules du second Opuscule.

74. Pour cet usage il vaut mieux ne pas employer l'héliostate, mais faire passer au mur l'image entière par le trou de la fig. 11. Le mouvement de cette image causé par celui du soleil ne fait ici aucun embarras. On placera l'instrument avec les deux prismes variable & fixe immédiatement devant ce trou sur la console de la fig. 14. On doit ouvrir cet instrument de manière à former l'angle du variable contraire à celui du fixe, ce qui commencera à rappeller le spectre formé par celui-ci vers la place naturelle: on verra d'abord le rouge le plus proche, le violet le plus éloigné de la place naturelle: mais en avançant on aura l'inversion du spectre, qui se fera avant d'arriver à la place naturelle vers ce lieu-là ou après, selon que le prisme variable sera de matière qu'à parité de réfraction fait une dispersion plus grande, presqu'égale, ou plus petite. Si l'on nomme b' l'angle que le prisme variable a au milieu de l'inversion du spectre, on aura ces deux formules.

$$\text{I. } sin.x' = \frac{m}{M} \times sin.a. \quad \text{II. } \frac{dm}{dM} = \frac{m}{M} \times (tan.(b'-x')\,cot.x' + 1).$$

75. Dans ces formules on aura déjà par les paragraphes précédents les valeurs M du prisme variable, & m du fixe, l'angle a de ce dernier, & b' par cette observation. On trouvera par la première l'angle x': celui-ci donnera dans la seconde le rapport $\frac{dm}{dM}$. Si l'on a trouvé par le num. 50 la valeur dM; son logarithme ajouté à celui de cette fraction donnera la valeur absolue dm, qui fait connoître la qualité dispersive: mais il ne sera pas nécessaire de trouver cette valeur absolue. Dans les formules du second Opuscule on n'a que les valeurs m, m', $\frac{dm}{dm'}$ pour la qua-

lité réfractive des deux substances à employer, & pour le rapport de leurs qualités distractives. Ayant trouvé par cette méthode les valeurs des deux fractions $\frac{dm}{dM}$, $\frac{dm'}{dM}$, on divisera la première par la seconde, & on aura $\frac{dm}{dm'}$.

76. Si l'inversion du spectre étoit momentanée, faite par la réunion de tous les rayons colorés comme quand on l'a par le seul prisme variable, on pourroit avec quelqu'exactitude déterminer l'angle qui la donne : si l'on employe le prisme fixe adossé au variable de la même espèce de verre ; on a aussi l'inversion instantanée. On l'auroit encore en employant pour le fixe toute autre substance, si les valeurs *dm* appartenantes aux différents binaires de couleurs avoient dans les deux substances du prisme variable, & fixe le même rapport comme Newton le croyoit ; je trouve qu'on auroit aussi cette célérité d'inversion instantanée du spectre, cette union de toutes les couleurs avec le passage par le blanc ; mais tout au contraire on y voit toujours une inversion successive qui détruit cette identité de rapport, ce qu'exige une précaution particulière pour en saisir le milieu.

77. Je considère deux genres d'inversions successives du spectre, une directe, & l'autre oblique, & dans le premier genre deux espèces, dont une commence du côté du bord rouge, & l'autre du bord violet. Le spectre est formé par une suite d'images colorées que j'appelle de cercles, quoiqu'elles n'ont pas la forme bien circulaire, que là, où le rayon qui va au centre de chacune est perpendiculaire au mur : mais ici je n'ai pas égard à la petite ellipticité causée par la petite obliquité dans les autres positions peu éloignées de celle-là. Quand après le parallelisme du prisme variable ce spectre va vers la place de l'image primitive blanche formée par le rayon direct avant l'interposition du prisme que j'appelle place naturelle, tous ces cercles avancent de manière que le dernier violet va le plus vîte & le premier rouge le plus lentement. Celui-ci surpassé par l'autre se trouve après l'inversion du côté opposé à sa position précédente.

78. Si

78. Si les bases des prismes, variable & fixe, sont bien horizontales, & les surfaces planes verticales, les centres de ces cercles avancent sur une même ligne de manière que celui du rouge passe successivement sur tous les autres ; & alors il y a l'inversion directe : mais si la base du fixe est un peu inclinée par rapport à celle du variable, les centres des cercles des couleurs plus réfrangibles passent un peu au-dessus, ou au-dessous des autres, & j'appelle celle-là l'inversion oblique. J'expose ce mouvement des centres au §. XIV sur les figures de la planche 5, où à la figure 23 la ligne AF exprime l'intervalle qui contient tous les centres du spectre divisé en cinq couleurs principales, le violet le plus arriéré en AB, le bleu en BC, le vert en CD, le jaune en DE, le rouge en EF. Les parties de cet intervalle appartenantes aux différentes couleurs sont inégales ; mais comme cette inégalité n'entre pas ici en considération, j'ai fait ces espaces égaux entre eux.

79. Dans l'inversion directe de la première espèce l'espace des centres rouges commence à se trouver replié sur soi-même comme à la fig. 24, & alors dans ce bord il y a encore un rouge : un peu après le rouge se trouve à la fig. 25 replié en EF sur le vert DC, & le jaune replié sur soi-même déborde en *d* : en avançant à la fig. 26 le rouge se trouve déjà en EF sur le violet AB, & le vert reste seul sur le bord en *e* : le rouge à la fig. 27 est déjà dégagé du côté opposé, & le bleu déborde en *b* : à la figure 28 c'est le violet qui replié sur soi-même se trouve au bord en *a*, & à la fig. 29 tous les centres sont déjà dégagés comme ils étoient à la fig. 23, mais avec l'ordre opposé. La grandeur des cercles fait, que les images commencent à se combiner avant que les centres se joignent, & ils achevent à se quitter quelque temps après la séparation totale des centres : mais on ne s'apperçoit pas de ce reste de jonction.

80. La première qui disparoît est la couleur rouge confondue avec les suivantes, & on voit le jaune resté sur le bord antérieur, le violet se trouvant encore sur l'autre : celui-ci un peu après se trouve déjà mêlé avec le violet, & on voit dans le bord

postérieur le mêlange de ces deux couleurs, vineux, pourpré, d'une couleur qui ressemble à une espèce de vin rouge, mais beaucoup plus foncé que le rouge primitif: on voit alors sur le bord antérieur un très-beau vert tout pur: en avançant le violet disparoît mêlé avec les autres, le rouge est déjà dégagé au bord postérieur, & le bleu paroît seul sur l'antérieur, jusqu'à ce qu'à la fin le violet commence à paroître sur ce bord. C'est la suite des phénomènes, qu'on a dans la première espèce d'inversion directe. Si l'on révient en arrière en diminuant l'angle du prisme variable, l'inversion commence par la disparition du violet, & la suite des phénomènes révient la même avec l'ordre contraire, & c'est ce que j'appelle inversion directe de la seconde espèce. On les voit toutes les deux toujours, si l'on va alternativement en augmentant & diminuant assez l'angle du prisme variable. Pour voir tout cela il faut que le prisme fixe ait un angle beaucoup plus petit que le dernier du variable, quand celui-ci est d'une substance qui a beaucoup moins de force, & c'est alors qu'on voit avec beaucoup plus de distinction & clarté toute cette progression des phénomènes. Cela arrive, quand le prisme variable est d'eau, dont il y en a deux donnés par deux instruments, que j'expose dans les suppléments II, & III de cet Opuscule (on les trouve à la planche VII & VIII), & je donne dans le supplément IV des expériences, que j'ai faites avec le premier; on voit pourtant la même suite, quand on a un bon variable, & un bon fixe de deux verres de force assez différente, comme l'un de flint & l'autre de verre commun.

81. On tire aisément de cette succession d'inversion, qu'on ne peut pas réunir par deux substances que deux seules couleurs, ce que je démontre à la rigueur, pour ce qu'appartient aux objectifs composés des deux substances, dans le dernier supplément du second Opuscule. C'est ici, que je fais usage de la courbe de la figure 21. Dans la seconde des mes anciennes dissertations imprimées parmi les Mémoires de l'Académie de Bologne, & réimprimés à Vienne en Autriche je fais voir, que si à la place d'une ligne courbe il y avoit une ligne droite, l'inversion seroit in-

instantanée avec le passage par le blanc : que dans le cas de la courbe il y a un angle déterminé par les qualités des deux substances, qui en arrivant à être égal à celui que les tangentes de cette courbe tirées par son premier, & dernier point contiennent avec l'axe détermine l'angle du prisme variable pour le commencement, & la fin de cette inversion. Les quantités intermédiaires de cette angle donnent par les points du contact de la tangente d'un angle égal la couleur qui doit rester seule dans le bord, & toutes les cordes paralleles à cette tangente donnent par leurs extrêmités les couleurs réunies à deux à deux. Tout cela est très-essentiel pour bien connoître la nature de la lumière, & on devroit s'en occuper dans les leçons de la Physique Expérimentale, comme d'une quantité d'autres objets qui appartiennent à la théorie de la lumière, qui communement sont ignorés, & que j'ai développés dans plusieurs de mes ouvrages.

82. On voit les couleurs le moins séparées, quand c'est le vert le plus pur, qui se trouve tout seul sur le bord antérieur ; mais comme le vert y dure quelque temps, & autour du minimum il y a toujours très-peu de différence, on est un peu incertain sur l'angle qu'on doit prendre. Je ne trouve presque point de doute, quand j'employe l'inversion oblique : on voit aux figures 30, 31, 32, 33, 34 l'évolution oblique des centres qui passent les uns au-dessus des autres. On obtient cette inversion en élevant avec tant soit peu de cire la pointe de la base du prisme fixe. Alors on voit les deux bords opposés, le rouge & le violet, qui formoient une espèce de croissant presque d'un demi-cercle chacun, continuer sur cette forme, mais de manière que leurs cordes, qui auparavant étoient verticales, s'inclinent & déviennent presque horizontales, l'une de ces deux couleurs extrêmes débordant dans la partie supérieure de l'image, & l'autre dans l'inférieure, quand leurs centres se rencontrent verticalement l'un sur l'autre : entre les deux se trouve dans un petit éspace le vert en haut, le pourpré en bas, ou viceversa. On saisit aisément cette position pour avoir sa valeur b', qui entre dans la formule proposée, c'est-à-dire, l'angle qui corrige tant qu'on peut la distraction.

83. Dans

83. Dans la planche VI j'ai mis les cercles seulement de trois couleurs, du violet, vert, rouge, qui sont A, B, C : les quatre premiers appartiennent à l'inversion directe, les trois derniers à l'oblique : on en a l'explication au paragraphe XIV num. 168 & suivants. La première, seconde, & quatrième expriment le cas où il y a le seul prisme variable, ou le variable avec le fixe de la même espèce, & alors dans la seconde il y a la réunion de tous les rayons, qui forme le blanc : la première, troisième, & quatrième appartiennent au variable réuni avec le fixe de substance différente : les trois dernières sont pour l'inversion oblique.

84. Je suis obligé de supprimer ici beaucoup de remarques; mais je ne puis pas me dispenser d'en indiquer une bien essentielle. Entre le lieu de l'inversion successive, & la place naturelle on verra le rouge plus éloigné de la même place que le violet, ce que paroît contraire à la plus grande réfrangibilité du violet : mais cela arrive de la combinaison des deux effets des deux prismes, dont chacun donnera plus de réfraction au violet qu'au rouge, mais en sens contraire de manière que la jonction en laissera plus au rouge qu'au violet. Si le constant d'un verre commun a détourné le rouge à droite de 6 degrés, & le variable de flint à gauche de 5, celui là en ajoutant deux minutes par degré pour le violet le détournera à droite de $6^{\circ}.\ 12'$, & celui-ci en ajoutant trois minutes par degré, le détournera à gauche de $5^{\circ}.\ 15'$. Ainsi le rouge aura à droite $6^{\circ} - 5^{\circ} = 1^{\circ}$, & le violet $6^{\circ}.\ 12' - 5^{\circ}.\ 15' = 0^{\circ}.\ 57'$, moins que l'autre.

85. Dans le §. XV il n'y a que le résumé de toutes les formules qui appartiennent aux opérations exposées ci-dessus, & dans les quatre derniers on a seulement l'exemple des applications numériques au prisme variable de mon instrument, & à deux qualités de verres que j'ai employés. Il n'y a rien de particulier que le différent résultat des valeurs m, dm, m', dm' pour différentes espèces de verres, ce qui fait voir la nécessité de déterminer les qualités de ceux qu'on doit employer, avec l'impossibilité de donner des règles générales pour les Ouvriers jusqu'à ce que la Chymie ait fourni des verres de qualités constantes, & le

tort

tort de ceux qui imitent les mesures trouvées dans des bonnes lunettes d'Angleterre sur des verres inconnus.

§. X.

Des suppléments ajoutés à ce premier Opuscule.

86. Le premier contient la théorie des deux prismes réunis, dont le premier reçoit le rayon perpendiculairement à sa première surface, & nous avons fait usage des formules qui en résultent. Le second a la description de mon ancien instrument pour avoir le prisme variable d'eau que j'avois donné dans la première de mes deux anciennes dissertations en l'appellant vitromètre : on le voit ici à la figure 44 planche VII. L'eau est contenue dans le vide qu'on y voit, entre trois parois fixes, & un HRQF mobile autour d'un axe FH. Celle-ci, & l'autre BCLK sont percées, & ont deux plaques de verre poli par lesquelles le rayon passe : la ligne YZ tracée sur une plaque de verre qui est portée par la règle QZ & touche l'arc XV divisé en degrés marque les degrés de l'instrument depuis le parallelisme qui répond à zero, & j'ai pratiqué la vis circulaire MO qui doit donner les minutes dans le divisions d'un cercle PN par un index tourné par le mouvement qui ouvre plus ou moins le même instrument. Quand il n'y a que de l'eau, on a un angle d'eau égal à celui de l'instrument. Quand on adosse à la plaque T la surface d'un prisme fixe dont la base quadrangulaire est en bas & l'angle en haut, on a pour angle variable celui qui reste entre la seconde surface de ce prisme adossé, & la plaque S. Cet angle alors dévient égal à la somme de deux angles, de celui de l'instrument & de l'autre du même prisme adossé. Celui-ci reçoit perpendiculairement à sa première surface le rayon reçu de même par cette plaque. Ce rayon après avoir traversé l'angle d'eau sort par la plaque S. On y a la même théorie qu'avec l'angle variable de verre dans l'instrument de l'Opuscule I.

87. Ce prisme fait aller l'image en haut, ce qui est bien incom-

commode ; parce qu'on a besoin d'une échelle pour suivre le mouvement de l'image, & il y a quelques autres inconvénients. Comme un prisme d'eau donne l'inversion successive du spectre beaucoup plus lente & par-là bien plus sensible ; pour avoir encore cet avantage j'ai substitué depuis à celui-là un autre instrument, qui est le sujet du troisième supplément : il donne un prisme à angle variable d'eau, qui fait marcher le spectre horizontalement : il arrive à donner un angle un peu-plus grand : il rétient mieux l'eau : il la tient toujours à la même hauteur. On voit toutes les pièces dont il est composé à la planche VIII. Ces sont deux boîtes ouvertes par-dessus, dont la seconde de la fig. 46. doit entrer dans la première de la fig. 45. Celle-ci a une ouverture en I'G avec un canal un peu élevé sur la base qu'on y attache après qu'on y a fait entrer l'autre. Après que cette seconde boîte est entrée dans la première on y attache par des vis en Q la règle QQ', qui porte un nonius, comme aussi la première en a une autre qui porte l'arc DBE, sur lequel le même nonius doit marquer les degrés. La seconde a une ouverture OPP'O', qui lui laisse la liberté de tourner, sans en être empêchée par le canal de la première : celle-ci aussi a une ouverture en MNN'M', pour donner la liberté au rayon de partir. Elle a une plaque verticale HII'H' de verre poli à la fin du canal avec une planchette horizontale attachée à la base du même canal pour recevoir le prisme fixe, qui doit être adossé à cette plaque, & la seconde boîte a de même une plaque HII'H' de verre poli, mais plus longue. L'eau reste dans la seconde boîte rétenue par ses parois, par celles de la première boîte, par les parois du canal, & par les deux plaques de verre. L'angle d'eau est changé à droite, & à gauche par le mouvement circulaire qui change l'inclinaison de la plaque HI' de la seconde boîte à celle de la première. Tout le reste sert pour expliquer en détail la construction de l'instrument avec le grand & le petit mouvement, & toute la théorie de son usage.

88. Le supplément IV contient les phénomènes de l'inversion successive que j'ai observé avec le premier de ces deux vitromètres, & le supplément V fait voir comme on peut suppléer au dé-

défaut de mes instruments pour employer le prisme variable de verre avec le fixe pour les mêmes usages, moins commodement, mais pourtant de manière à en tirer le même profit. On trouve en grand (Tab. IX fig. 1) l'angle DCE d'un petit prisme en adossant sa surface CE à une règle qui a servi pour tracer la ligne droite AB assez longue. On en comprime la surface supérieure contre sa base, & on y applique la même règle, ou une autre à sa surface CD, en PN, & ayant retiré le prisme on trace la ligne droite qui formera l'angle NCB à côtés autant longs qu'on veut, égal à celui du prisme. On prend d'une échelle sur le côté PN une longueur CF, qui servira de rayon ayant pour sinus la distance du point F à la ligne AB prise avec le compas, & portée sur la même échelle. En répétant l'opération plusieurs fois on aura autant de déterminations par les lignes P'N', P''N'', &c, qui doivent dévenir paralleles entre elles.

89. Ayant placé les deux pièces du prisme variable à la fig. 2 de manière que le rayon reçu perpendiculairement par la petite aille dans le mur à la place naturelle marquée auparavant, on y tracera sur les surfaces supérieures une ligne ED, qui rencontrera la surface convexe en *e*, la concave en *d*. On aura dans toute autre position des figures 3 & 4 l'angle Q en prenant avec un compas à pointes bien aigues la distance *ed* : celle-ci portée sur une échelle à parties bien petites sur laquelle on aura déterminé une fois pour toujours le rayon de sphéricité des deux surfaces courbes, & divisée par le double de ce rayon donnera le sinus de la moitié de cet angle ; parce que la moitié de la corde est le sinus de la moitié de l'angle, & on a le même quotient en divisant le double par le double.

§. XI.

De l'objet du second Opuscule, & de sa division.

90. CET Opuscule tout rempli de calcul est beaucoup moins susceptible d'un extrait : il est divisé en quatre chapitres, dont chacun a sa numération particulière pour ses articles. Le premier

 cha-

chapitre contient la recherche & détermination des formules générales pour les foyers des lentilles simples & composées, qui sont le fondement pour tous les calculs qui doivent donner les sphéricités pour la composition des oculaires & des objectifs acromatiques. Dans le second chapitre il y a l'application de ces formules à cette espèce de lentilles composées: dans le troisième les formules finales tirées du chapitre précédent, & dégagées de toute recherche, & déduction: dans le quatrième l'explication détaillée de ces formules, & l'application du calcul numérique aux mêmes formules. Pour ceux qui sont accoutumés à appliquer les nombres aux valeurs algébriques, le seul troisième chapitre qui est très-court suffiroit pour l'usage pratique.

91. La préface, & le premier paragraphe du premier chapitre donnent des notices préliminaires. Les formules qu'on y cherche appartiennent à la relation, que les rayons de sphéricité des substances, dont le qualités réfractives & distractives sont connues, ont aux foyers, & aux erreurs de sphéricité: on en tire aussi les expressions des erreurs de réfrangibilité. Elles ne sont pas tout-à-fait exactes, parce que pour les rendre traitables on y néglige des quantités d'ordres inférieurs.

§. XII.

Des formules fondamentales avec les équations qu'on en tire pour la correction de deux erreurs.

92. Les formules fondamentales dont il s'agit ici ne se rapportent immédiatement qu'aux oculaires & objectifs composés de deux lentilles; mais dans le second chapitre on en tire aussi ce qu'appartient aux composées de trois. Elles sont les mêmes que celles que M. Clairaut a données dans les Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences de Paris pour les années 1756 & 1757 imprimées l'année 1762; mais je les ai trouvées de ce temps-là par une méthode un peu plus élémentaire: on les trouve dans la première de mes anciennes dissertations, dont j'ai fait mention dans l'Extrait du premier Opuscule. Tout ce procédé avec les formules mêmes se trouve ici au §. II tiré mot-à-mot de l'édition de Vienne.

93. J'

93. J'ai mis au num. 41 de ce chapitre (pag. 181 & 182) tout le résultat qui contient les seules formules trouvées. C'est à la page 183 que commence le second chapitre, où il y a au §. I des notices préliminaires : au §. II pag. 184 on a pour en faire l'application les dénominations avec quelque petit changement, & les formules avec quelqu'addition pour les faire servir, comme j'ai dit ci-dessus, encore pour trois lentilles : M. Clairaut n'en avoit considéré que deux. Ce catalogue des dénominations & des formules est le fondement de tout ce qui suit après.

94. Les valeurs données, dont on fait usage ici pour deux substantes, sont (num. 24) la raison des sinus m pour le verre commun, m' pour le flint, avec $\frac{dm}{dm'} = u$, comme nous avons dit ci-dessus : les valeurs cherchées sont les rayons de sphéricité pour deux lentilles a, b, a', b' avec a'', b'' pour la troisième, positives pour la première surface convexe & seconde concave, négatives pour la première concave & seconde convexe de chaque lentille, & les distances focales de chaque lentille particulière h, h', h'', & H de l'assemblage des deux ou trois. Le foyer est le point de l'axe vers lequel les rayons sont rendus convergents par une lentille convexe, ou du quel il sont rendus divergents par une concave, & il s'appelle réel dans le premier cas, virtuel dans le second, la distance focale est la distance de ce point à la lentille pour le cas où ces rayons arrivent paralleles, & sa valeur est positive pour le foyer réel, negative pour le virtuel. Si les rayons arrivent convergents, j'appelle p la distance du point de la convergence, qui dévient négative, s'ils sont divergents, infinie, s'ils arrivent paralleles : r, r', r'', R sont pour les deux premiers, ce que sont h, h', h'', H pour les derniers.

95. La distance focale positive est plus grande pour les rayons rouges qui sont le moins réfractés, que pour le violets qui le sont le plus, & la différence de ces distances est l'erreur de réfrangibilité : elle est plus grande aussi pour les rayons de la même espèce, qui tombent sur la première surface infiniment près de l'axe, que pour ceux qui tombent au bord de l'ouverture, & cet-

cette différence est l'erreur de sphéricité. Ces sont les erreurs longitudinales, dont on tire les circulaires qui sont les diamètres des petits cercles dont nous avons parlé ci-dessus : en corrigeant ceux-là, on corrige aussi ceux-ci.

96. Il y a des valeurs subsidiaires, dont celles qui réviennent le plus souvent sont $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$, $\frac{1}{f''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{b''}$, & c'est bien étonnant de voir, combien les valeurs fractionnaires par une admirable simplicité & analogie de formules rendent non seulement traitable, mais d'une grande facilité & élegance le calcul qui sans cela seroit très-compliqué, & presqu'impraticable. On a $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'} = \frac{m'-1}{f'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{m''-1}{f''}$, qui dévient $\frac{m-1}{f''}$, lors que dans le cas de trois lentilles la troisième est de la même matière que la première, comme elle doit être pour l'union de deux couleurs par deux substances. On a aussi $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$ pour deux lentilles, & $= \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$ pour trois. Comme en changeant la valeur m des rayons rouges en $m + dm$ des violets, on doit avoir la même valeur H pour détruire l'erreur de réfrangibilité, on devra faire $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} = 0$ pour les deux, & $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm}{f''} = 0$ pour les trois, ce qui donne l'équation pour corriger l'erreur de réfrangibilité $\frac{1}{f'} = \frac{dm}{dm'} \times \frac{1}{f} = -\frac{u}{f}$, ou $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} \times (\frac{1}{f} + \frac{1}{f''})$.

97. On tire un autre équation pour corriger l'erreur de sphéricité, qui est exprimée par d'autres valeurs subsidiaires q, q', q'' données par les valeurs m, m', chacun de six termes, qu' on trouve à la fin du §. II chap. II pag. 185 : ils dépendent des valeurs $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ dont la première s'évanouit pour les objectifs, pour les quels les rayons arrivent d'une distance qui est censée infi-

infinie : on trouve les deux autres données par m, f, f', f'' au numero 11 pag. 186, & la même valeur $\frac{1}{p} = 0$ fait évanouir les derniers trois termes de la valeur q. La correction de l'erreur de sphéricité exige l'équation $q + q' = 0$, ou $q + q' + q'' = 0$, qui est la seconde. On trouve ces deux équations avec les valeurs q, q', q'' au num. 16 du même paragraphe pag. 187 & 188 avec d'autres dans les trois num. suivants qui appartiennent aux valeurs à substituer dans l'application aux cas particuliers.

§. XIII.

De l'application des formules à la détermination des valeurs cherchées.

98. DANS une lentille double il y a quatre rayons de sphéricité à trouver, & dans une triple il y en a six. Pour les objectifs il faut corriger tant l'erreur de réfrangibilité que l'autre de sphéricité. Cette correction donne deux déterminations, & la longueur de la distance focale dont dépend la longueur & l'effet de la lunette en donne une troisième. Ainsi pour un objectif à double lentille on a une détermination arbitraire à y ajouter, & dans la triple on en a trois. Cela donne une infinité de différents cas, parmi les quels il faut choisir des déterminations, qui donnent des combinaisons commodes pour l'exécution & pour l'exactitude des corrections. On n'auroit pas celle-ci, si l'on employoit des rayons trop petits par rapport à la distance focale, qui porteroient dans l'ouverture un trop grand nombre de degrés, & par-là trop grandes les quantités négligées comme petites. Les objectifs seroient acromatiques encore sans la correction de l'erreur de sphéricité; mais l'image à cause de la grande ouverture dont les objectifs acromatiques sont capables déviendroit confuse par la raison exposée au num. 19. Il y a des cas où on peut employer un oculaire fait acromatique par la correction du seul erreur de réfrangibilité sans avoir trop de confusion du côté de l'autre de sphéricité : pour cela j'applique les formules générales aussi à cette espèce d'oculaires, & alors il y a une détermination arbitraire de plus.

99. Pour

99. Pour l'application aux cas particuliers des objectifs je réduis les deux équations à une seule par la substitution dans la seconde de la valeur $\frac{1}{f'}$ tirée de la première au num. 96, où elle est donnée par $\frac{1}{f}$ ou par $\frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$. Comme les valeurs $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$, qui entrent dans les valeurs q, q', q'' de la seconde avec les valeurs a, a', a'', f, f', f'', sont aussi données par m, m', f, f' (num. 97); on réduit par les substitutions l'équation composée des deux énoncées réunies aux valeurs m, m' données avec les inconnues a, a', f pour l'objectif double, a, a', a'', f, f'' pour le triple.

100. Sans considérer la longueur de la distance focale H, qui doit être donnée on pourra prendre d'abord une unité arbitraire, qui donne seulement le rapport mutuel entre les quantités qu' on cherche, pour les réduire après à une autre unité qui en donne la valeur absolue. Cette nouvelle unité est la distance focale de l'objectif composé : la première avec les déterminations arbitraires réduit tant les trois inconnues pour l'objectif double, que les cinq pour le triple à une seule : celle-ci tirée de l'équation donne les autres. Le choix de cette première unité fait plus ou moins à propos rend le calcul plus au moins simple.

101. La valeur donnée par l'équation est une valeur fractionnaire, & le procédé de tout le calcul donne toutes les autres valeurs fractionnaires & toutes réduites à cette première unité qui, comme nous avons dit, ne donne que leur relation entre elles. Les valeurs relatives à cette unité qu' on tire de l' équation & des positions arbitraires sont $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$: on tire de ces-ci les suivantes fractionnaires de même, $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f}$, $\frac{1}{b'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{f'}$, $\frac{1}{b''} = \frac{1}{a''} - \frac{1}{f''}$, $\frac{1}{h} = \frac{m-1}{f}$, $\frac{1}{h'} = \frac{m'-1}{f'}$, $\frac{1}{h''} = \frac{m-1}{f''}$, $\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$.

102. C'est alors qu'on trouve les valeurs a, b, a', b', a'', b'',

h, h',

h, h', h'' réduites à cette nouvelle unité égale à la distance focale H. On obtient cette réduction en divisant la fraction $\frac{1}{H}$ ainsi trouvée par chacune des fractions précédentes trouvées de même, comme par exemple a en divisant $\frac{1}{H}$ par $\frac{1}{a}$. Comme les valeurs numériques rapportées à différentes unités sont en une même raison entre elles, la précédente valeur $\frac{1}{a}$ sera à la précédente $\frac{1}{H}$ come la nouvelle $\frac{1}{a}$ est à la nouvelle $\frac{1}{H}$, c'est-à-dire, comme la nouvelle $H = 1$ est à la nouvelle a, qui sera cette précédente $\frac{1}{H}$ divisée par la précédente $\frac{1}{a}$.

103. C'est généralement le procédé pour les objectifs: celui pour les oculaires est toujours presque le même avec une première unité précédente, & la seconde égale à la distance focale. Quand on voudra la distance focale d'un nombre quelconque de pouces ou lignes, on n'aura qu'à multiplier les valeurs a, b, &c. trouvées en dernier lieu par ce nombre, pour en avoir celle, selon laquelle ayant travaillé les lentilles on aura la distance focale cherchée.

104. Pour la première unité arbitraire j'ai pris f dans tous les calculs pour les oculaires, & pour ceux des objectifs à deux lentilles, pour les quels j'ai développé ce qui appartient à quatre cas: pour ceux à trois j'en ai développé trois, & ébauché un quatrième. Dans le second de ce trois j'ai pris pour unité une quantité qui révenoit aussi à f; mais f dans une de deux autres dévenoit $= 2$, dans l'autre $= \frac{1}{2}$. Le R. P. Gaudibert (*) en

(*) Le P. Gaudibert est un homme de très-grand mérite, bien avancé dans les théories, exercé dans les calculs, & d'une adresse singulière dans le travail des lunettes acromatiques dont il en a fait des excellentes par lui même. A mon départ de Paris l'année dernière il étoit Sous-Prieur du Couvent des PP. Jacobins de la rue S. Dominique. Je lui avois communiqué mes formules & ma manière de les appliquer aux cas particuliers: il a changé ma première unité, & l'ordre des substitutions, par lequel changement son équa-

en suivant dans le reste ma méthode & mes formules a pris pour les objectifs à trois lentilles la première unité $= \frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$, ce que l'a amené à une équation générale qui rend beaucoup plus facile l'application à un très-grand nombre de cas particuliers, quoique dans ceux que j'ai développé mon calcul numérique appuyé aux unités propres pour chacun est beaucoup plus court.

§. XIV.

Des formules finales pour l'application aux cas particuliers & leur résultat après les calculs numériques.

105. DANS le §. III pag. 193 il y a l'application à cette espèce d'oculaires où il n'y a que la correction de l'erreur de différente réfrangibilité tant pour les composés de deux lentilles que de trois : dans le §. IV pag. 195 il y a l'application aux objectifs à deux lentilles, dans le §. V pour ceux-ci à trois. Toujours je fais la seconde lentille concave de flint, la première de verre commun convexe, & quand il en a trois, la troisième de la même espèce de verre que la première.

106. Pour les oculaires doubles je prend par les déterminations arbitraires deux cas qui me donnent des combinaisons bien simples: la

quation est dévenue d'une application beaucoup plus facile, mais qui exige des calculs numériques beaucoup plus longs, quand il s'agit de l'application à quelque cas particulier. Il a eu la bonté de m' envoyer un Mémoire qu' il a fait là-dessus : j'en ai tiré le fond de mon premier supplément à ce second Opuscule, que je publie ici avec sa permission. On y verra deux tables, qu' il a calculés pour les qualités de deux espèces de verres qu' il employoit alors, par les quels le calcul numérique est beaucoup simplifié ; mais comme pour chaque combinaison de différentes espèces de verres il faut faire de nouveau tout le long calcul numérique qui est nécessaire pour former des tables pareilles à celles-là ; c'est alors qu'on pourra tirer un très-grand avantage de sa méthode, quand la Chymie aura trouvé le moyen de donner des verres bien purs de qualité propre à des bonnes combinaisons, & constamment la même, pour faire l'application à un très-grand nombre de cas, & choisir les meilleures combinaisons, pour donner aux Artistes les mesures nécessaires pour ceux qui font le seul travail mécanique sans aucune connoissance des théories. Cette methode a beaucoup de mérite aussi par l'élégance du calcul.

la première lentille isoscèle dans tous les deux cas, & dans le premier la seconde isoscèle aussi, dans le second les surfaces internes en contact continuel : pour les triples aussi je prend deux cas, dont le premier a toutes les trois lentilles isoscèles, & le second tous les deux binaires des surfaces internes en contact total.

107. Pour les objectifs à deux je développe quatre cas: dans le premier la première lentille est isoscèle, dans le second les surfaces internes sont en contact total: dans le troisième je suppose la première lentille donnée, dans le quatrième la seconde donnée. Comme dans ces deux derniers cas on a déjà deux rayons donnés dans des mesures d'une échelle donnée; on ne peut pas réduire les deux autres à l'unité égale à la distance focale, mais aux unités de cette même échelle. C'est la seule exception pour la règle générale de la dernière réduction. J'ai donné des règles particulières pour cet objet; mais il n'arrive guère qu'on ait l'occasion de les employer.

108. Pour l'objectif triple je propose aussi quatre cas: dans le premier je prend les deux lentilles extrêmes isoscèles & égales, dans le second les deux premières isoscèles avec les distances focales égales, dans le troisième toutes les trois lentilles isoscèles, dans le quatrième la lentille du milieu isoscèle avec l'attouchement total des deux binaires de surfaces internes.

109. Pour tous ces cas je propose les quantités données, la réduction des cherchées à une seule par les suppositions faites pour chacun cas, l'équation qui en dérive, les valeurs algébriques des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, & pour les trois lentilles encore $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{1}{h''}$, avec celle de la fraction $\frac{1}{H}$ qui divisée par les précédentes doit donner les valeurs a, b, a', b', a'', b'', h, h', h'' rapportées à l'unité $= H$.

110. J'ai mis dans le §. VI qui commence à la page 209 un bon nombre de réflexions intéressantes sur tout le procédé des paragraphes précédents, & sur leurs objets que je ne puis pas suivre dans cet Extrait dévenu déjà trop long. Ainsi je passe au

troi-

troisième chapitre page 223, où j'ai mis tout le résultat des formules finales qui, comme j'ai dit ci-dessus, suffisent seules pour ceux qui savent appliquer les nombres aux valeurs algébriques. Elles sont divisées en trois classes : la première pour les oculaires, la seconde pour les objectifs à deux lentilles, la troisième pour ceux à trois. Il y a la distinction de tous les cas, & pour chacun d'eux les dénominations, les équations, les expressions des valeurs fractionnaires qui doivent donner les absolues cherchées.

111. Toutes les équations pour les objectifs sont du second degré : mais celle du troisième cas pour les objectifs triples, qui porte toutes les trois lentilles isoscèles, s'étoit présentée d'abord dans le second chapitre à la page 206 après un calcul bien long & compliqué sous la forme de troisième degré. Je ne l'ai pas réduite au second, que par une remarque qui intéresse la nature du calcul en général, & elle ne me s'est présentée à l'esprit qu'après avoir cherché une racine de cette équation par un très-long calcul numérique. Cette racine m'a donné la troisième lentille concave, tandis que je l'attendois convexe. Je me suis apperçu que cette concavité étoit égale à la convexité de la première, ainsi celle détruisoit tout l'effet de celle-ci. En conséquence l'effet de la seconde devoit aussi être nul, & je l'ai trouvé tel, puisque le rayon de sa sphéricité est dévenu infini. Le cas particulier où parmi les trois lentilles isoscèles une des extrêmes détruit tout l'effet de l'autre, & celle du milieu dévenant une plaque à surfaces planes n'en a aucun, est contenu dans le cas général d'un objectif composé de trois lentilles isoscèles, où les erreurs de réfrangibilité & de sphéricité sont corrigées, parce que les foyers de tous ces rayons vont également à l'infini. Cela m'a fait connoître la racine qui donnoit cette égalité des lentilles contraires & égales. Quand on connoît une racine d'une équation du troisième degré, on trouve aisément celle du second qui a les deux autres, & cela a été encore plus facile ici où cette racine heureusement est venue $= -1$. J'ai développé tout cela avec tout le plus grand détail dans une note bien longue qui se trouve à la page 206 & suivantes.

112. Dans

112. Dans le dernier chapitre il y a l'application du calcul numérique à ces formules du troisième. J'ai suivi cette application pas-à-pas donnant les exemples au long digérés en plusieurs tables, & donnant l'explication de chaque ligne, avec la manière d'employer les logarithmes, même pour la résolution des équations de second degré : tout cela paroîtra superflu à ceux qui savent appliquer les nombres aux formules ; mais comme j'ai dit ci-dessus, j'ai voulu principalement pour ce qu'appartient à l'exécution pratique des calculs m'adapter à ceux qui ne sont que foiblement initiés dans l'analyse, & réduire ce travail à une imitation simplement mécanique de ces exemples.

113. Dans le premier supplément j'ai exposé avec toute l'étendue la méthode du P. Gaudibert que je viens d'indiquer ci-dessus en y ajoutant beaucoup de remarques très-intéressantes même pour bien comprendre la généralité des expressions algébriques, qui bien considérées donnent des solutions pour des cas, aux quels l'Analyste n'avoit pas songé. Ayant fait une première substitution à mes formules, du valeur c pour $\frac{m-1}{m'-1}$, $\frac{m-1}{f}$ pour $\frac{1}{p'}$, $\frac{m-1}{f} + \frac{m'-1}{f'}$ pour $\frac{1}{p''}$, qui sont de même mes valeurs, & ayant employé une dénomination des A, B, C, &c. par m, m', c il trouve l'équation générale pour la destruction de l'erreur de la sphéricité, qui est réduite aux valeurs données par cette dénomination avec les inconnues a, a', a'', f, f', f'' : on la trouve à la page 280. Son unité $= \frac{1}{f} + \frac{1}{f''}$, & l'équation qui corrige l'erreur de réfrangibilité $\frac{dm}{f} + \frac{dm'}{f'} + \frac{dm}{f''} = 0$ lui donnent $\frac{1}{f'} = -\frac{dm}{dm'} = -u$, & $\frac{1}{f''} = 1 - \frac{1}{f}$: une seconde substitution de ces valeurs réduit la même équation aux seules inconnues a, a', a'', f, qui après une nouvelle dénomination des A', B', C', &c. par les précédentes A, B, C &c., & par u se réduit à celle qu'on voit à la page 282. Celle-ci moyennant la double table

des valeurs A, B, C, &c., & A', B', C', & réduites en nombres relatifs aux valeurs m, m', u de ses verres avec leurs logarithmes dévient beaucoup plus commode pour l'application aux cas particuliers.

114. On trouve ici ces tables à la fin de ce supplément à la page 305 : dans la seconde il y a encore la valeur u', qui est celle de la fraction $\frac{1}{H}$ donnée par son unité la même pour tous les cas. J'ai mis au §. III qui commence à la page 282 les applications qu'il a faites à sept cas différents, dont trois sont les mêmes que mes trois premiers. Dans chacun de ces cas j'ai mis la réduction des valeurs fractionnaires qui ont pour dénominateur les quantités cherchées, à une seule prise pour x par les déterminations arbitraires qui conviennent à chacun, l'équation pour avoir x, les autres fractions en nombres relatifs à sa première unité, & le résultat numérique pour les rayons a, b, a', b', a'', b'' tels qu'il les a trouvés lui-même.

115. Dans deux de ces cas l'équation s'étoit présentée sous la forme de troisième degré, mais en substituant les nombres il avoit trouvé que le coefficient du premier terme s'étoit évanoui, ce qui les a réduites aussi au second. Il m'a envoyé dépuis une démonstration générale qui fait voir que ces coefficients doivent s'évanouir quelle que soit la qualité des verres exprimée par les différentes valeurs m, m', u. Dans mes remarques que j'ai mis au §. IV pag. 291 & suivants j'ai donné la raison de cette égalité de ces premiers termes à zero tirée de la nature du calcul, qui devoit exprimer tant le cas des lentilles extrêmes de sphéricités contraires & égales avec celle du milieu dévenue une plaque plane, que celui de trois plaques toutes planes, & j'ai fait voir de quelle manière ces combinaisons étoient contenues dans le même coefficient = 0, pourquoi la première chez moi s'est présentée d'une manière si différente, comme on pouvoit reconnoître l'autre aussi dans ma solution.

116. Parmi les remarques que j'ai ajouté, j'ai fait la réduction de quelqu'une de ses formules aux miennes, qui ont moins de ter-

mes,

mes, quand il s'agit d'un cas particulier, & ayant appliqué les valeurs de ses verres aux miennes j'ai trouvé les mêmes résultats numériques pour les rayons de sphéricité cherchés, ce qui dissipe, ou au moins diminue de beaucoup la crainte de quelqu'erreur qui se soit glissée ou dans les expressions algébriques, ou dans les calculs arithmétiques. J'ai étendu aussi l'usage de ces mêmes formules. Ici je ne puis pas suivre tout cela en détail; mais ce que j'ai indiqué est assez pour voir combien elles peuvent être avantageuses tant pour la théorie, que pour la pratique des lunettes acromatiques à trois lentilles.

§. XV.

Des deux derniers suppléments de cet Opuscule.

117. Le premier de ces deux qui commence à la page 306 contient les formules pour la réunion de plusieurs couleurs par autant de lentilles de différentes substances. J'ai fait voir ci-dessus au §. VIII comment on peut avoir les valeurs m appartenantes à un nombre quelconque de couleurs de manière à pouvoir reconnoître chacun en particulier, quand on employe des prismes de différentes substances les uns après les autres, & à avoir avec assez d'exactitude les différences dm appartenantes à un nombre quelconque de binaires de couleurs pour en tirer les valeurs $\frac{dm}{dm'}$ relatives à autant de binaires de substances. On ne peut pas trop multiplier le nombre des lentilles à cause de la lumière qu'on perd à chaque passage par une surface réfringente, & encore beaucoup plus à cause de la somme des épaisseurs des mêmes lentilles, qui augmente la somme des quantités négligées; mais comme on en employe déjà trois, dont deux sont de la même espèce, on aura beaucoup plus d'avantage à varier aussi l'espèce de ces deux pour réunir trois couleurs, quand la Chymie en aura donné des assez bien homogènes de qualités requises pour avoir des bonnes combinaisons, & de qualités constamment les mêmes. On a au num. 7 de ce supplément pag. 309 les dénomina-

nations, au num. 9, & 12 la forme des équations réduites aux seules valeurs inconnues f, f', f'', &c. : je fais voir qu'en prenant pour unité une de ces-ci, on aura autant d'équations que des quantités inconnues. On trouvera toutes ces inconnues, & on aura encore les relations entre les a, & b de chaque valeur f pour varier les combinaisons par des conditions arbitraires, & choisir celles qui donneront des valeurs réelles & des rayons de sphéricité assez longs par rapport à la distance focale.

118. Le sujet du dernier supplément qui commence à la page 313 est très-essentiel pour la théorie exposée dans ce second Opuscule. Comme pour la déduction des formules on a été obligé de négliger beaucoup de petites quantités, il faut examiner l'effet que cela a produit sur le résultat, & voir par une méthode exacte combien d'erreur tant de réfrangibilité que de sphéricité reste dans un objectif composé selon le résultat des calculs faits après ces formules, comparer ce reste avec les erreurs entières d'un objectif simple, & si l'on trouve un reste assez considérable, avoir une méthode pour achever la correction en faisant des petits changements aux rayons de sphéricité donnés par les mêmes calculs.

119. Pour remplir le premier objet il faut avoir une méthode pour déterminer avec exactitude quatre distances focales d'un objectif composé, dont on sait les rayons de sphéricité, l'épaisseur des lentilles, l'ouverture de la première surface. Deux de ces distances focales sont celles qui appartiennent aux premiers rayons rouges, & derniers violets, qui arrivent infiniment près du centre de l'ouverture parallelement à l'axe, & deux aux rayons de la même espèce, qui arrivent avec le même parallelisme au bord de la même ouverture. Ces quatre distances devroient être égales : si on les trouve inégales, la différence tant des deux premières que des deux dernières entr'elles forme l'erreur longitudinale de réfrangibilité, & la différence de la première à la troisième, & de la seconde à la quatrième forme l'autre de sphéricité.

120. Pour trouver les deux premières de ces quatre distances j'employe la formule relative au passage par une seule surface tirée

rée de celles qu'on voit au num. 41 du troisième chapitre de l'Opuscule II, qui a été trouvée dans le chapitre premier : il n'y a là rien de négligé, quand il s'agit des rayons qui arrivent infiniment près de l'axe : je l'applique d'abord aux rayons qui arrivent à la première surface avec une direction censée parallèle à l'axe, & après aux rayons qui arrivent aux surfaces suivantes avec une inclinaison déterminée par chaque précédente pour sa suivante. Pour les deux autres j'employe un calcul trigonométrique rigoureux. Mais il faut remarquer, qu'ici à la place des valeurs m, m' moyennes qu'on a employé dans les formules avec la fraction $\frac{dm}{dm'} = u$, on a besoin des deux valeurs m, & des deux m' déterminées séparément pour les premiers rayons rouges, & derniers violets.

121. La formule pour les rayons infiniment proches à l'axe est $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma} + \frac{1}{mp}$, où m est à l'ordinaire la raison des sinus pour entrer de l'air au vitre de la première lentille, qui dévient m' pour la seconde, a est le rayon de sphéricité pour l'entrée de l'air à la première surface d'une lentille, p la distance de la surface au point où la direction du rayon qui arrive coupe l'axe : la valeur p est positive pour le rayon convergent, négative pour le divergent : toutes ces quantités doivent être données pour chaque surface : q est la distance, qu'on cherche, de la même surface au point, où la direction du rayon réfracté coupe le même axe. Cette formule pour la première des quatre surfaces, où le parallelisme fait évanouir la fraction $\frac{1}{p}$, dévient $\frac{1}{q} = \frac{m-1}{ma}$, ou $q = \frac{ma}{m-1}$: pour la seconde surface de chaque lentille, où le rayon passe du verre à l'air, mettant $\frac{1}{m}$ pour m, ajoutant un accent sur son p & q, substituant b pour son a, la formule dévient $\frac{1}{q'} = -\frac{m-1}{b} + \frac{m}{p'}$. La valeur q de la première surface diminuée de l'épaisseur de la lentille dévient p' de la seconde : ainsi en appellant c cette épaisseur on a $p' = q - c$. En passant de la seconde surface à la troisième, qui est en attouchement avec elle, quand les deux lentilles sont contigues, la valeur q

de

de la seconde dévient p de la troisième, & la valeur q de celle-ci diminuée de l'épaisseur de la seconde lentille dévient p' de la quatrième : celle-ci à la fin donne son q', qui est la distance focale cherchée.

122. J'ai appliqué dans le §. IV pag. 340 ces formules à l'objectif du premier cas de ceux à deux lentilles que j'ai obtenu au num. 36 du chap. IV du second Opuscule, & j'ai trouvé le résultat qu'on voit à la page 343. Dans la petite table on a dans la première colonne les deux valeurs m pour le verre commun de la première lentille, & le deux m' pour la seconde : dans la seconde les deux épaisseurs c, c', dont j'ai pris la seconde plus petite à cause de la concavité qui en faisant rentrer les surfaces la diminue vers son milieu : dans la troisième les formules. On y voit après cette table le résultat des valeurs q, q' de la première, & de la seconde surface de chaque lentille tant pour le rayon rouge que pour le violet.

123. Au §. III de ce supplément pag. 325, j'ai mis l'application de la Trigonométrie aux rayons qui arrivent au bord de l'ouverture. Il y a un premier probléme pour la première surface, qui reçoit les rayons parallèles à l'axe, & le second après pour les autres, qui les reçoivent déjà détournés par les surfaces précédentes, & pour avoir la solution complette dans tout le plus grand détail, je l'ai divisé en huit cas différents, qui dépendent de trois binaires de conditions qu'on peut rencontrer : que la surface soit la première d'une lentille ou la seconde, la raison des sinus étant dans celle-là $1:m$, dans celle-ci $m:1$: que la surface même soit convexe ou concave : que le rayon y arrive convergent par rapport à l'axe ou divergent.

124. On a toujours la grandeur & la position du rayon de la sphéricité, & la valeur m ou m' : on a aussi pour la première surface le demi-diamètre de l'ouverture, pour tous les cas du second probléme la distance de la surface au concours de la direction du rayon qui arrive, avec l'axe, & l'angle qui s'y forme : on tire ces deux derniers éléments du calcul de la solution du cas appartenant à la surface précédente, mais en ayant égard aussi pour le premier à l'épaisseur de la lentille quand on passe de sa première surface à la seconde. J'y ai pour chacun de ces huit cas dans le plus grand détail la suite des triangles à résoudre pour avoir le résultat qui est la di-

distance de la même surface au point où le rayon réfracté rencontre l'axe, & l'angle qui s'y forme : j'y ai ajouté des subdivisions en d'autres subalternes : dans tout ce procédé on voit l'analogie & simplicité de la Géométrie dans la transformation de ses lieux géométriques, par laquelle la solution trouvée pour un cas est transporté à tous les autres : mais l'évolution particulière de chacun faite une fois épargne la peine de faire des nouvelles réflexions pour chaque application, ce qu'en détournant l'attention donne occasion à des fautes grossières dans l'exécution : on les évite, quand par cette évolution préliminaire on a réduit l'opération presqu'à un simple mécanisme.

125. Dans le même §. IV j'ai appliqué de même tout ce procédé au même objectif, & on l'a dans la table divisée en quatre parties qui répondent aux quatre surfaces. J'ai donné un pouce d'ouverture par pied de distance focale, ce qu'on a fait avec le plus grand succès même dans des objectifs de trois pieds de foyer, quand on a eu des plaques de flint assez pures & homogènes ; mais pourtant on n'en a trouvé que très-rarement de cette grandeur. Cette supposition, en faisant la distance focale $= 1$, donne le demi-diamètre de l'ouverture $= \frac{1}{24}$, qui est le second terme EH de la première partie de cette table marqué $= 1:24$. Dans cette partie il y a le procédé à la fig. 1 de la planche XI qui répond au premier problème, & dans les figures suivantes celui qui a rapport aux cas, qui répondent aux circonstances des autres surfaces qu'on y voit indiquées avec leurs figures. On a dans la première colonne de chaque partie d'abord les données, & après les cherchées, dans la seconde colonne les nombres qui répondent aux termes de la première pour les rayons rouges, dans la troisième les mêmes pour les violets : ceux qui répondent aux cherchées exprimées par des lettres sont les trouvées exprimées en nombres. Dans la dernière ligne de chaque partie la valeur AF, qui est la distance cherchée, répond à la valeur q, ou q' trouvée à la page 343 pour les rayons qui arrivent près du centre de l'ouverture, & la dernière valeur AF de la quatrième partie est la distance focale cherchée qui répond à la dernière valeur q'.

126. Pour comparer l'effet de l'objectif composé selon les formules avec un objectif simple d'une seule lentille isoscèle du même foyer,

yer, & de la même ouverture, j'ai appliqué le même procédé à celui-ci en prenant la même valeur *m* du verre commun du précédent. Mais il a fallu auparavant trouver le rayon de sphéricité d'une lentille isoscèle de cette espèce de verre, dont la distance focale fût la même que celle de cet objectif composé, ce que j'ai fait au num. 94. Les erreurs dans un objectif simple de flint seroient beaucoup plus forts, ce qu'empêche d'employer pour les lunettes à objectif simple des verres, qui en parité de réfraction font considérablement plus de dispersion. Cette ouverture est nécessaire pour avoir le grand grossissement dont les acromatiques sont susceptibles réuni avec une quantité de lumière capable de frapper les fibres du fond de l'œil avec les parties de l'image étendues par une espèce si excessivement plus ample; ainsi un tel objectif donneroit une image très-confuse, & en cela consiste l'avantage de la découverte de Dollond qu'on voit par la comparaison des erreurs que j'ai mises ici dans la table du num. 95 à la pag. 350.

127. La première partie a les quatre distances focales de l'objectif simple que j'ai trouvées, comme j'ai énoncé au même num. 94, avec ces deux erreurs de réfrangibilité, & les deux de sphéricité indiquées au num. 119: dans la seconde partie on voit les mêmes objets pour l'objectif composé acromatique tirés selon le num. 125 des résultats qu'on a pour les dernières valeurs q' à la page 343, & pour les dernières AP des pages 344 & 355. On y voit en premier lieu combien les erreurs de la seconde partie sont diminuées par rapport à celles de la première: comme elles ne surpassent pas les dixmillièmes parties de la distance focale, elles doivent être tout-à-fait insensibles: les erreurs inévitables dans la détermination des valeurs m, m', dans l'exécution des sphéricités qu'on doit donner, & dans l'examen de celles qui ont été réellement données, doivent produire des erreurs beaucoup plus fortes. J'ai cherché encore quelle seroit l'erreur de ce même objectif acromatique par rapport à un rayon qui ayant les valeurs m, m' moyennes entre celles que j'avois employées dans la recherche précédente arriveroit au milieu entre le centre & le bord de l'ouverture: je l'ai trouvé aussi insensible, ce que fait voir que l'erreur de sphéricité y est corrigée de telle manière à ne pou-

voir

voir espérer rien de plus par les changements des rayons des courbures de cet objectif, qui seroient aussi tout-à-fait insensibles, & pour l'exécution & pour l'observation. Pourtant comme dans d'autres combinaisons on pourroit rencontrer des restes d'erreurs plus considérables, je donne dans le §. VI la méthode de les corriger par ces changements des rayons de courbure.

128. Mais avant de le commencer je propose beaucoup de remarques sur les valeurs qu'on trouve dans cette table, que je suis forcé de supprimer ici: j'indiquerai seulement que en comparant dans la première partie l'erreur de sphéricité avec celle de réfrangibilité je m'étends beaucoup sur cet objet très-intéressant, & je fais voir que le rapport de celle-là à celle-ci dans les lentilles à foyer court, & ouverture grande est incomparablement plus fort que le rapport trouvé par Newton dans celle qu'il avoit examinée, que par conséquent la correction de l'erreur de sphéricité est aussi très-essentielle dans les objectifs à grande ouverture; mais je ne puis pas suivre dans cet Extrait tous ces objets quoique ils soient de la dernière importance.

129. Je ne puis aussi que seulement indiquer la méthode que je propose dans ce dernier paragraphe pour la correction de ce reste d'erreur. En ôtant de la première distance focale les quatre autres indiqueés au num. 127. on trouve quatre différences, qui anéanties donneront l'union des foyers des rayons extrêmes arrivés infiniment près du centre de l'ouverture, & à son bord, avec celui du rayon arrivé au milieu entre le centre & le même bord. Je les appelle e, e', e'', e'''. Si l'on fait une petite addition n au premier rayon a de sphéricité, en refaisant tout le calcul, on trouvera de combien chacune de ces quatre erreurs a été diminuée, & j'appelle r, r', r'', r''' ces diminutions, qui seront négatives, si à la place de la diminution on trouve une augmentation. En reprenant la valeur a primitive, on fera une petite addition n' au second rayon b, & refaisant aussi le calcul on trouvera les diminutions des mêmes erreurs primitives e, e', e'', e''' que j'appelle $r1, r'1, r''1, r'''1$. On trouvera de même par des petites additions faites successivement aux rayons a', b' les diminutions $r2, r'2, r''2, r'''2$, & $r3, r'3, r''3, r'''3$. En appellant x, x', x'', x''' les changements à faire aux mêmes erreurs pour les détruire tou-

toutes à la fois, & en supposant les petites différences proportionelles, ce qui est le fondement de la méthode des fausses positions; on trouve en r, n, x leurs effets, que l'ont voit au num. 114 de ce supplément sur la fin de la page 361. Ces effets se trouvent en quatre lignes, mais de manière que les quatre colonnes donnent les diminutions des erreurs e, e', e'', e''' chacune de la sienne. Ainsi en faisant $=0$ chaque colonne, on a à la page 363 quatre équations, dont on tirera les quatre corrections à faire aux quatre rayons pour faire l'union de ces cinq foyers.

130. Si en faisant ces corrections aux rayons, & refaisant les calculs on ne trouve pas les cinq distances focales égales on prendra les nouvelles différences e, e', e'', e''', & on refera la même opération jusqu'à ce qu'on parvienne à la correction totale, & on y parviendra par ce moyen, si elle est possible, ou au moins on trouvera la plus grande diminution possible, comme on fait dans toute méthode de fausse position.

131. C'est le procédé pour un objectif à deux lentilles: pour un à trois on a six rayons qu'on peut changer: ainsi par les changements de tous les six on pourra chercher l'union de sept foyers, par la correction de six différences de la première distance focale aux six autres. Ces foyers peuvent être pour les rayons, rouge, & violet, qui arrivent près du centre de l'ouverture, & à son bord, & pour celui d'une couleur de réfrangibilité intermédiaire arrivant près du centre, au bord, & au milieu entre le centre & le bord; mais il faut alors avoir les valeurs m, m', m'' pour toutes ces trois espèces de rayons relatives aux trois substances différentes, & il faut que la Chymie nous en donne des propres pour cet effet.

132. Ces calculs sont immenses, & il ne vaudra pas la peine de les entamer que quand cet art nous aura donné ces substances propres à ces objets, pures, & des qualités constamment les mêmes, pour trouver au moins pour un très-grand nombre de lunettes les rayons de sphéricité à donner aux Opticiens pour l'exécution pratique.

FIN DU TOME I.



MONITUM.

Inveniretur nonnunquam & in hoc, & in sequentibus Tomis postrema e notis decimalibus minus accurata, minor enim cura est adhibita in iis, quæ jam a summis sequentium fractionum de more neglectis immutari solent: alios numericorum potissimum calculorum errores, qui & Auctori scribenti, & amicis pluribus ad trutinam revocantibus effugerint, ignoscet facile lector harum rerum peritus, qui omnino non ignorabit, quam facile menda nonnulla effugiant tam in scribendo, quam in relegendo, mente nimirum fere perpetuo avolante, & distracta: sæpe nonnulla in describendo excidunt, quæ finales formulas relinquunt illæsas: has inventum iri accuratas confiditur, adhuc tamen qui certior esse velit, poterit facile eas iterum ex iisdem principiis eruere calculo repetito.

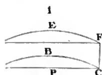
Occurrent aliquando nonnulla, quæ prima fronte videbuntur erronea, nec vero sunt: sæpe numeris habentur adscripti logarithmi, qui ipsis non respondent accurate, sed proxime, quod semper accidit, ubi ii ipsi numeri eruti ibi sunt ex iis logarithmis, & nonnunquam ubi recurrit usus numerorum, qui jam in præcedentibus calculis deducti sunt ex iis logarithmis, qui tum ipsis adscribuntur pro iis, qui iisdem numeris respondent accurate in tabulis. Nonnunquam in formulis desumptis e superioribus locis, & adhibitis in posterioribus occurret, dum comparantur loca eadem, mutatio aliqua signi, ob quam videbitur erronea formula ipsa, quæ tamen erit exacta ob mutationem aliam pertinentem ad ejus valores. Hujusmodi exemplum habetur in uno e valoribus I hujus Tomi constante pluribus terminis, quorum priores habent omnes præfixum signum positivum, postremi negativum. Is habetur in linea 2 paginæ 228 hujus Tomi eò translatus e linea postrema paginæ 199: in hoc priore loco terminus D habetur inter habentes præfixum signum negativum, E inter habentes positivum,

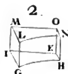
in illo posteriore D inter habentes positivum, E inter habentes negativum, quia inter horum valorum factores occurrit valor c', qui in hoc loco posteriore pag. 227 lin. 18 constat binis terminis habentibus signa contraria iis, quæ iidem ejus valoris termini habent in illo priore pag. 200 lin. 1. Ea autem mutatio est inducta, quia ipse valor c' numeris substitutis juxta illam priorem denominationem evasisset negativus, & reddidisset negativos per se ipsos illos terminos D, & E, reliquis omnibus per se positivis, qui cum hac mutatione evadunt per se positivi etiam ipsi. Utrobique valor I est accuratus habita ratione denominationis adhibitæ in singulis, qui erroneus est visus non consideranti mutationem factam in ipso valore c' ingrediente eos terminos ad obtinendam eam conformitatem valorum numericorum pertinentium ad eos terminos per se ipsos independenter a signis, quæ ipsis præfiguntur in valore I.

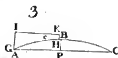
Licet, quæ latine appellari solent figurarum tabulæ, gallico idiomate dicantur *planches*; omnibus, etiam iis, quæ pertinent ad Opuscula gallice conscripta, adscriptum est in earum vertice T*ab* ad uniformitatem quandam, ut etiam in textu sæpe in iis citandis eadem syllaba est adscripta, quæ nimirum in earum vertice habebatur.

Errores, qui inter deprehensos in hoc Tomo corrigi non poterant abradendo, ac reimprimendo, non remanent, nisi tantummodo tres, qui hic subjicientur: eorum numerus excrevit in Tomis sequentibus, quorum vix ullus est vere typographicus, Auctore nimirum in scribendo, ac relegendo, & amico in expendenda maxima parte manuscriptorum ante impressionem, ac exemplarium post primas impressiones manu factas pro correctione adhibenda, labore continuo semper magis defessis.

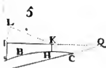
pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
42	17	posteriorem per priorem	priorem per posteriorem.
127	32	remaneret	remanet.
254	19	refrangibilitate	sphæricitate.


1
E
F
B
P
C


2
M
O
L
N
I
K
G
H

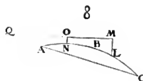

3
I
K
B
G
H
C
A
P


4
Q
I
K
B
H
A
G
C

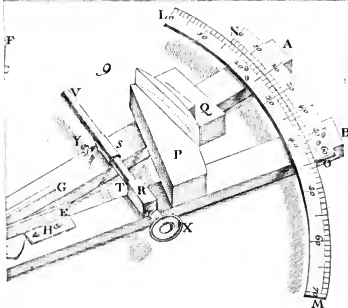

5
L
K
Q
B
H
C

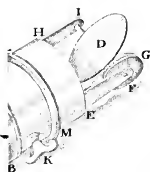

6
B
O
M
N
L
A
C

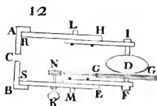

7
O
M
Q
N
C
L

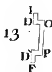

8
Q
O
M
B
A
N
L
C

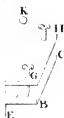



9
L
N
A
B
V
Q
Y
S
P
O
G
T
R
E
H
X
M


I
H
D
G
F
E
M
B
K


12
A
R
L
H
I
C
D
N
G
G
S
B
K
M
E
F

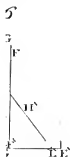

13
I
D
O
D
P
F



15

L

M



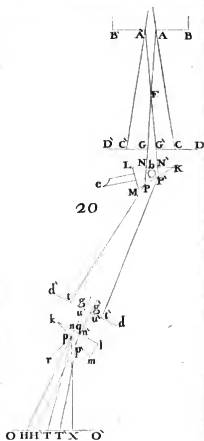
17

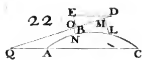
C

B

A




B'
A'
A
B
F
D'
C'
G
G'
C
D
L
N
b
N'
K
e
M
P
P'
20
d'
t
g
g'
u
u'
t'
d
k
n
q
n'
p
p'
l
r
m
O
H
H'
T
T'
X
O'


E
D
22
O
M
B
L
N
Q
A
C


NAPOLI

Tab. V

23

C D E F

24

F

A B C D E e

5

F E

D d

26

F E D

A B C c

27

F E D C

A B b

B

A a

29

F E D C B A

F

D E e

31

F E

A B C D d

c

33

F E D C

A B b

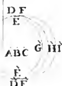
34

F E D C B

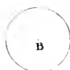
A a



35



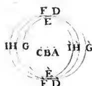
36



37



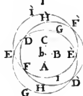
38



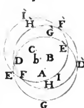
39



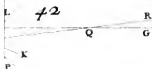
40

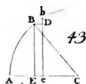


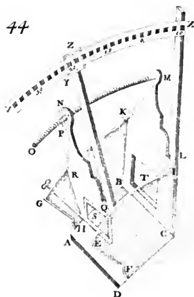
41



Tab. VII.









Tab. VIII.

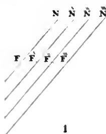
46

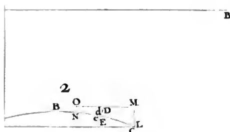
48

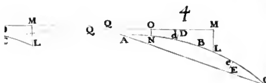
49

50

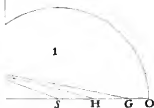
Tab. LX



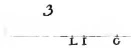




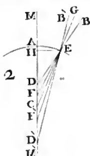
Tab. II.

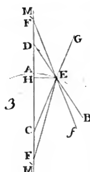


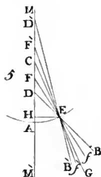


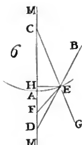


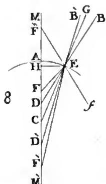


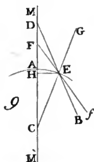

M
B
G
B
A
H
E
2
D
F
C
F
D
M


M
F
D
G
A
H
E
3
B
C
f
F
M


M
D
F
C
5
F
D
E
H
A
B
f
B
f
G
M


M
C
6
B
H
E
A
F
G
D
M


M
B
G
B
F
A
H
E
8
F
D
f
C
D
F
M


M
D
G
F
A
E
H
9
B
f
C
M




NAPOLI



